3D-Extrema

Funktionen zweier Variabler: Extremwertbestimmung

72 SCHEMA für zweifach (total) differenzierbare Funktionen $f(x,y)$

73 Ständige Annahmen an Funktion f und Variablenbereich $D(f)$

1) **Variablenbereich $D(f)$:** $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$a < x < b \quad (-\infty \leq a < b \leq \infty) \quad \text{und} \quad c < y < d \quad (-\infty \leq c < d \leq \infty)$$

2) **f besitzt (total) stetige partielle Ableitungen $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ zweiter Ordnung**

1 Berechne die beiden partiellen Ableitungen $f'_x(x,y)$ und $f'_y(x,y)$ und löse das (meist nicht-lineare) Gleichungssystem ▷ Thema 2

$$(*) \begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

d.h suche *alle* Punkte (x_0,y_0), die $f'_x(x,y) = 0$ *und* $f'_y(x,y) = 0$ erfüllen [*und* im *Definitionsbereich* von f liegen].

2 *Entscheidungsregel:*

a Es gibt *keine* Lösungen (x_0,y_0) von $(*)$:
Dann hat f keine (lokalen) Extrema/Extremalstellen → *Abbruch*

b Es gibt Lösungen (x_0,y_0) von $(*)$:
Diese heißen dann **stationäre Punkte** und sind *mögliche* Extremalstellen

3 Berechne die zweite partiellen Ableitungen $f''_{xx}(x,y), f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y), f''_{yy}(x,y)$ und damit die sog. **Hesse-Determinante**

$$H_D(x_0,y_0) := f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy}(x_0,y_0))^2$$

für jeden der oben ermittelten stationären Punkte (x_0,y_0).

Abhängig von der konkreten Funktion f und den stationären Punkten

- ist es manchmal einfacher, $H_D(x, y)$ einmal allgemein auszurechnen (und umzuformen) und dann jeweils (x_0, y_0) einzusetzen
- und manchmal ist es einfacher, jeweils (x_0, y_0) zunächst in die partiellen Ableitungen einzusetzen und dann $H_D(x_0, y_0)$ auszurechnen

4 *Entscheidungsregeln für jeden stationären Punkt* (x_0, y_0):

a $\boldsymbol{H_D(x_0, y_0) = 0}$ $\Rightarrow$ keine Entscheidung möglich
$\rightarrow$ *Abbruch*, verfeinerte Methoden erforderlich;

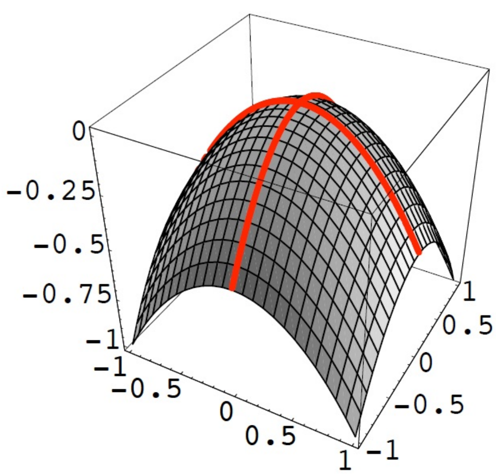
b $\boldsymbol{H_D(x_0, y_0) > 0}$ $\Rightarrow$ $f''_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$, (x_0, y_0) ist lokale Extremstelle:

- $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)}$ ist **lokale Minimalstelle** von f
- $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)}$ ist **lokale Maximalstelle** von f

c $\boldsymbol{H_D(x_0, y_0) < 0}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$ ist **Sattelpunkt** von f

5 Bestimme den jeweiligen Funktionswert $\boldsymbol{f(x_0, y_0)}$, d.h den **Extremwert** (Minimalwert/Maximalwert) $f(x_0, y_0)$ zur Extremstelle (x_0, y_0) bzw. den **Sattelpunktwert** $f(x_0, y_0)$ zur Sattelpunktstelle (x_0, y_0).

Beispiele



1. Einfaches Maximum $\boldsymbol{f(x, y) = -\frac{x^2+y^2}{2}}$

$f'_x(x, y) = -x$, $f'_y(x, y) = -y$;

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} -x = 0 \\ -y = 0 \end{array} \right\},$$

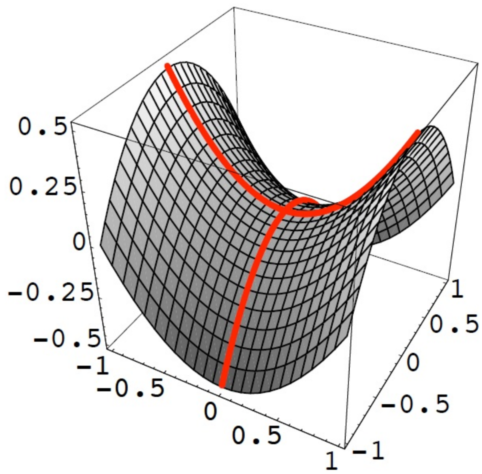
also einziger stationärer Punkt: $(0, 0)$;

$$f''_{xx}(x, y) = -1,\ f''_{yy}(x, y) = -1,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0 = f''_{yx}(x, y);$$

$$H_D(0, 0) = (-1) \cdot (-1) - 0^2 = 1 > 0$$
und $f''_{xx}(0, 0) = -1 < 0$

$\Rightarrow$ $(0, 0)$ ist (lokale) Maximalstelle, Maximalwert: $f(0, 0) = 0$



2. Normalsattel $\boldsymbol{f(x,y) = (x^2 - y^2)/2}$

$f'_x(x,y) = x,\ f'_y(x,y) = -y;$

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ -y = 0 \end{array}\right\},$$

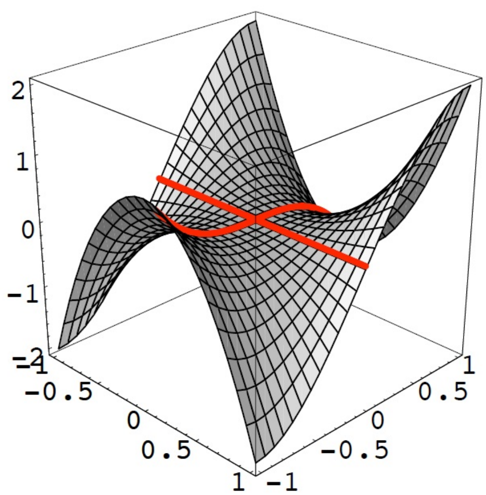
also einziger stationärer Punkt: $(0,0)$;

$$f''_{xx}(x,y) = 1,\ f''_{yy}(x,y) = -1,$$

$$f''_{xy}(x,y) = 0 = f''_{yx}(x,y);$$

$$H_D(0,0) = 1 \cdot (-1) - 0^2 = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ ist Sattelpunktstelle, Sattelpunktwert: $f(0,0) = 0$



3. Affensattel $\boldsymbol{f(x,y) = y(3x^2 - y^2)}$

$f'_x(x,y) = 6xy,\ f'_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2;$

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} xy = 0 \\ x^2 = y^2 \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \text{ und } x^2 = y^2 \\ \textit{oder} \\ y = 0 \text{ und } x^2 = y^2 \end{array}\right\},$$

also einziger stationärer Punkt: $(0,0)$;

$$f''_{xx}(x,y) = 6y,\ f''_{yy}(x,y) = -6y,$$

$$f''_{xy}(x,y) = 6x = f''_{yx}(x,y);$$

$$H_D(0,0) = 0 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ keine Entscheidung möglich

Wir betrachten die als (lokale) Extremwert-/Sattelpunktstellen überhaupt in Frage kommenden stationären Stellen (x_0, y_0) mit $f'_x(x_0, y_0) = 0 = f'_y(x_0, y_0)$:

73a Durch das Schema entscheidbare Konstellationen

Fall 1: $H_D(x_0, y_0) > 0$, d.h. $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0)$:

Lokales Extremum von f an der Stelle (x_0, y_0), d.h ▷ *Bsp. 1*

für *alle* Stellen (x, y) aus einem gewissen „Umfeld“ von (x_0, y_0) gilt:

$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ *(lok. MAX)* bzw. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ *(lok. MIN)*

Mögliche Konstellationen für die partiellen Funktionen sind dann:

$f''_{xx}(x_0, y_0)$	*und* $f''_{yy}(x_0, y_0)$	
>0	> 0	lokales Minimum von f_x, f_y *(und f)*
<0	< 0	lokales Maximum von f_x, f_y *(und f)*

Fall 2: $H_D(x_0, y_0) < 0$, d.h. $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0)$:

Sattelpunkt von f an der Stelle (x_0, y_0), d.h ▷ *Bsp. 2*

(x_0, y_0) ist zwar stationärer Punkt (waagerechte Tangenten der partiellen Funktionen), aber in jedem „Umfeld“ von (x_0, y_0) sind weder alle Funktionswerte höchstens $f(x_0, y_0)$ [Maximaleigenschaft durch $f(x_0, y_0)$ nicht erfüllt] noch alle Funktionswerte mindestens $f(x_0, y_0)$ [Minimaleigenschaft durch $f(x_0, y_0)$ nicht erfüllt].

Einzige mögliche Konstellationen für die partiellen Funktionen:

$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$ (d.h. beide $\neq 0$):

lokales Minimum/Maximum von f_x, f_y insbesondere:

ein partielles Maximum trifft auf ein partielles Minimum

$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) = 0$ (d.h. $f_{xx} = 0$ und/oder $f''_{yy} = 0$):

möglicher Wendepunkt (mit waager. Tangente) von f_x und/oder f_x

73b Durch das Schema nicht entscheidbare Konstellationen

Fall 3: $H_D(x_0, y - 0) = 0$, d.h. $(f''_{yx}(x_0, y_0))^2 = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0)$:

Mögliche Konstellationen für die partiellen Funktionen: ▷ *Bsp. 3*

Wie in Fall (2)!!

VORSICHT
[Der Hauptzweck obiger Ausführungen]: Schließen Sie **nicht umgekehrt** von partiellen Extremwertüberlegungen (bzgl. f_x und f_y, also „ceteris paribus") auf Extremwerte der zweifach (und damit von Wechselwirkungen zwischen x und y) abhängigen Funktion $f(x, y)$.