(3D-)Extrema unter Nebenbedingungen

Wir beschränken uns wieder (meistens) auf Funktionen von zwei Variablen x, y. Bei drei oder mehr Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sind die gleichen Techniken „analog“ anwendbar, aber schreib- und rechentechnisch weit aufwändiger.
Wir reden manchmal allgemeiner von Optimierung, wenn bei einer Fragestellung (zunächst) unklar ist, ob eine Minimierung oder Maximierung vorliegt.

Problemstellung (lokale Optimierung)

lokale Minimierung

Zu minimieren ist eine **Zielfunktion** $z = f(x, y), (x, y) \in D(f)$ unter einer **Nebenbedingung in Gleich-Null-Form**: $b(x, y) = 0$, d.h. gesucht ist die Lösungsmenge aller Stellen $(x_0, y_0) \in D(f)$, die

1. $z = f(x, y)$ minimieren, d.h.
   $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D(f)$ „in der Nähe“ von (x_0, y_0),
2. die Nebenbedingung erfüllen, d.h. $b(x_0, y_0) = 0$,
3. nicht an dem „Rand“ des Definitionsbereichs liegen

lokale Maximierung

Zu maximieren ist eine **Zielfunktion** $z = f(x, y), (x, y) \in D(f)$ unter einer **Nebenbedingung in Gleich-Null-Form**: $b(x, y) = 0$, d.h. gesucht ist die Lösungsmenge aller Stellen $(x_0, y_0) \in D(f)$, die

1. $z = f(x, y)$ maximieren, d.h.
   $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D(f)$ „in der Nähe“ von (x_0, y_0),
2. die Nebenbedingung erfüllen, d.h. $b(x_0, y_0) = 0$,
3. nicht an dem „Rand“ des Definitionsbereichs liegen

Bei ökonomischen Fragestellungen mit n Variablen kommen solche Extremwertaufgaben meist mit $1 \leq m \leq n - 1$ „relevanten“ Nebenbedingungen vor, bei zwei Variablen also *mit einer Nebenbedingung*.

Bsp. 1

Die Gesamtkosten eines Produktes werden beschrieben durch die Funktion

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 + y^2 \quad (\textit{Kapitaleinsatz } x > 0,\ \textit{Arbeitseinsatz } y > 0).$$

Die Kosten sollen minimiert werden unter der erschöpfenden Erlösbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y = 12$. D.h. minimiere $f(x,y)$ unter der Gleich-Null-Bedingung $b(x,y) := 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12 = 0$.

Bsp. 2

Der maximale Output einer Güterausstattung zur Herstellung eines Produktes werde beschrieben durch folgende Funktion vom Cobb-Douglas Typ

$$f(x,y) = x^{1/3} \cdot y^{2/3} \quad (\textit{Kapitaleinsatz } x > 0,\ \textit{Arbeitseinsatz } y > 0).$$

Der Output soll maximiert werden unter der erschöpfenden Kapazitätsbedingung $x + y = 300$. D.h. maximiere $f(x,y)$ unter der Gleich-Null-Bedingung $b(x,y) := x + y - 300 = 0$.

Zur Lösung solcher Optimierungsprobleme soll hier die *Multiplikatoren-Methode von Lagrange* vorgestellt werden. Sie bildet eine Standard-Methode, da sie sehr allgemein einsetzbar ist, denn das Schema läßt sich, mit entsprechenden Modifikationen, leicht übertragen auf Optimierungen von Funktion mit mehreren Variablen von beliebiger Anzahl und mehreren Nebenbedingungen in Gleich-Null-Form. Folgende Annahmen an die Zielfunktion $f(x,y)$ und die Nebenbedingungsfunktion $b(x,y)$ werden benötigt.

74 Annahmen der Lagrange-Methode an die Funktionen f, b und den Variablenbereich $D(f) = D(b)$

1) **Variablenbereich $D(f)$:** $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$c_1 < x < d_1 \quad (-\infty \leq c_1 < d_1 \leq \infty) \quad \text{und} \quad c_2 < y < d_2 \quad (-\infty \leq c_2 < d_2 \leq \infty)$$

2) **f, b besitzen (total) stetige partielle Ableitungen $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ bzw. $b''_{xx}, b''_{xy}, b''_{yx}, b''_{yy}$ zweiter Ordnung**

Die Anforderungen von Nr. 74 werden im Bsp. 1 von der Zielfunktion (ZF) $f(x,y)$, der Nebenbedingungsfunktion (NB) $b(x,y)$ und dem Variablenbereich $D(f)$ erfüllt. Wir werden die Multiplikatoren-Methode von Lagrange anhand von Bsp. 1 illustrieren.

75 Multiplikatoren-Methode von Lagrange

Die Optimierung der Zielfunktion $f(x,y)$ unter einer (relevanten) Nebenbedingung in Gleich-Null-Form: $b(x,y) = 0$, wird äquivalent zusammengefasst in die Optimierung der **Lagrange-Funktion**

$$L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda \cdot b(x,y)$$

mit dem (zunächst unbekannten) Lagrange-Multiplikator λ.

1 Bringe die Nebenbedingung in Gleich-Null-Form ($NB = 0$): $b(x,y) = 0$

und bilde damit, zusammen mit der Zielfunktion (ZF): $f(x,y)$

die Lagrange-Funktion (LF): $L(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda \cdot b(x,y)$

In Bsp. 1:

$$\begin{aligned}
&NB = 0 : b(x,y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12 \\
&ZF : f(x,y) = 2 \cdot x^2 + y^2 \\
&LF : L(x,y,\lambda) = 2 \cdot x^2 + y^2 + \lambda \cdot (4 \cdot x + 2 \cdot y - 12)
\end{aligned}$$

2 Bilde die partiellen Ableitungen von L und setze diese <u>simultan</u> gleich Null:

2-1 $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = 0$ deshalb die ($NB = 0$)-Form!

2-2 $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) \stackrel{!}{=} 0$

2-3 $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) \stackrel{!}{=} 0$

In Bsp. 1:

$$\begin{aligned}
L'_\lambda(x,y,\lambda) &= 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12 = 0 \\
L'_x(x,y,\lambda) &= 4 \cdot x + 4 \cdot \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\
L'_y(x,y,\lambda) &= 2 \cdot y + 2 \cdot \lambda \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

3 (Notwendiges Kriterium) Löse dieses (meist nicht-lineare) Gleichungssystem von drei Gleichungen nach den drei Variablen λ, x, y auf. Lösungen bestehen aus je drei Werten (x_0, y_0) und λ_0, wobei dann (x_0, y_0) eine Kandidatin für eine Extremstelle von f ist: eine **(bedingte) stationäre Stelle**.
Die Auflösung eines nicht-linearen Gleichungssystems kann sehr einfach sein, aber auch beliebig schwierig werden, eine generelle Lösungs-Methode ist nicht angebbar. Wir werden allerdings hier **ausschließlich Optimierungsprobleme behandeln, in denen Variablensubstitutionen zum Ziel führen**. Für die wichtigsten Problemstellungen im Anwendungsbereich, bei denen ein solches Vorgehen nicht erfolgreich ist, sind aber oft Lösungen bekannt. ▷ Ökonomische Veranstaltungen

In Bsp. 1:

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4\cdot x + 2\cdot y - 12 & = & 0 \\ 4\cdot x + 4\cdot\lambda & = & 0 \\ 2\cdot y + 2\cdot\lambda & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4\cdot x + 2\cdot y - 12 & = & 0 \\ 4\cdot x - 4\cdot y & = & 0 \\ \lambda & = & -y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4\cdot x + 2\cdot x & = & 12 \\ x & = & y \\ \lambda & = & -y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 2 \\ \lambda & = & -2 \end{array}\right\}$$

D.h. $(x_0, y_0, \lambda_0) = (2, 2, -2)$ ist einzige Lösung, (x_0, y_0) ist einzige bedingte stationäre Stelle.

4 (Hinreichendes Kriterium) Bestimme für jede bedingte stationäre Stelle (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0 die zweiten partiellen Ableitungen von f und b und damit den Wert

$$D_0 := D(x_0, y_0, \lambda_0) :=$$
$$(f''_{xx} + \lambda_0 \cdot b''_{xx}) \cdot (b'_y)^2 - 2 \cdot (f''_{xy} + \lambda_0 \cdot b''_{xy}) \cdot b'_x \cdot b'_y + (f''_{yy} + \lambda_0 \cdot b''_{yy}) \cdot (b'_x)^2$$

wobei alle Ableitungen an der bedingten stationären Stelle (x_0, y_0) gebildet werden.

4a Falls $D_0 > 0$, so ist (x_0, y_0) **lokale Minimalstelle** der ZF f unter der NB $b(x_0, y_0) = 0$; Minimalwert: $f(x_0, y_0)$.

4b Falls $D_0 < 0$, so ist (x_0, y_0) **lokale Maximalstelle** der ZF f unter der NB $b(x_0, y_0) = 0$; Maximalwert: $f(x_0, y_0)$.

4c Falls $D_0 = 0$, so ist keine Entscheidung möglich.

In Bsp. 1:

– $f''_{xx}(x, y) = 4$, $f''_{xy}(xy) = f''_{yx}(x, y) = 0$ und $f''_{yy}(x, y) = 2$

– $b''_{xx}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = 0$

Damit

$$D_0 = 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4^2 = 48 > 0,$$

d.h. $(2,2)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y = 12$
Minimalwert: $f(2,2) = 2 \cdot 2^2 + 2^2 = 12$

Als nächstes wird ein Hilfsmittel für Extremwertbestimmungen vorgestellt, das in dem Versuch besteht, zunächst die Zielfunktion in eine Form zu bringen, die leichter handhabbar ist (d.h. „einfachere“ Ableitungen, eine einfachere Methode anwendbar machen):

76 Monotone Transformation der Zielfunktion

Monotone Transformation heißt jede strikt monoton wachsende Funktion $h(z)$ einer Variable z, z.B. für $z > 0$, d.h. $D(h) = \mathbb{R}_{>0}$,

$$h(z) = z^2, h(z) = z^{1/2}, h(z) = ln(z), h(z) = e^z.$$

Wegen der strengen Monotonie gilt für alle Zahlenvergleiche im Definitionsbereich von h ($\triangleright$ Nr.14 (MF2)):

$$z \leq z_0 \Leftrightarrow h(z) \geq h(z_0),$$

d.h. z_0 maximiert/minimiert eine Menge zulässiger Zahlen z genau dann, wenn die Zahl $h(z_0)$ die monoton transformierten Zahlen $h(z)$ maximiert/minimiert. Wenn die zulässigen Zahlen z Funktionswerte $z = f(x,y)$ sind, so bedeutet dies: Jede Maximalstelle/Minimalstellen (x_0, y_0) von zuässigen Zahlen $z = f(x,y)$ ist auch eine Maximalstelle/Minimalstelle der Zahlen $h(z) = h(f(x,y))$, und umgekehrt.

Bsp. 2 (Fortsetzung)

Gemäß Nr. 76 ist das Maximierungsproblem gleichbedeutend mit der folgenden Aufgabenstellung

maximiere $\ln(f(x,y)) = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{2}{3} \cdot \ln y$ unter der Nebenbedingung $b(x,y) = 0$

Nun also Anwendung der Multiplikatoren-Methode von Lagrange auf dieses neue Maximierungsproblem

- **Aufstellen der Lagrange-Funktion:**

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{2}{3} \cdot \ln y + \lambda(x + y - 300)$$

- **Bestimmung der bedingten stätionären Punkte:**

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+y-300 & = & 0 \\ \frac{1}{3x}+\lambda & = & 0 \\ \frac{2}{3y}+\lambda & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+y-300 & = & 0 \\ \lambda & = & -\frac{1}{3x} \\ \frac{2}{3y}-\frac{1}{3x} & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+2\cdot x & = & 300 \\ \lambda & = & -\frac{1}{3x} \\ y & = & 2\cdot x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 100 \\ y & = & 200 \\ \lambda & = & -1/300 \end{array}\right\}$$

Also $(100, 200, -1/300)$ einzige Lösung, $(100, 200)$ einzige bedingte stationäre Stelle

- **Berechnung von $D(100, 200, -1/300)$:**
  - $(\ln(f))''_{xx}(x,y) = -\frac{1}{3x^2}$, $(\ln(f))''_{yy}(x,y) = -\frac{2}{3y^2}$
  - $(\ln(f))''_{xy}(xy) = (\ln(f))''_{yx}(x,y) = 0$
  - $b''_{xx}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = 0$
  - $D(100, 200, -1/300) = (-\frac{1}{3\cdot 100^2}+0)\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-\frac{2}{3\cdot 200^2}+0)\cdot 1 = -\frac{1}{20000}$

  $D(100, 200, -1/300) < 0$, d.h. $(100, 200)$ lokale Maximalstelle von $\ln(f(x,y))$ unter Nebenbedingung $b(x,y) = 0$. Nach Nr. 76 bedeutet dies, dass $(100, 200)$ auch Lösung des ursprünglichen Maximierungsproblems ist, also $(100, 200)$ ist lokale Maximalstelle von $f(x,y)$ unter Nebenbedingung $x+y = 300$, Maximalwert $f(100, 200) = 2^{2/3}\cdot 100$.

Zum Abschluß noch ein paar Bemerkungen zur Verallgemeinerung der Lagrange-Methode auf die Optimierung einer Funktion von n Variablen $f(x_1, \ldots, x_n)$ unter den m Nebenbedingungen in Gleich-Null-Form

$$b_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, b_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

1 Die Optimierungsaufgabe wird analog zu Nr. 75 äquivalent zusammengefasst in die Optimierung der sogenannten *Lagrange-Funktion*

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) := f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \cdot b_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m \cdot b_m(x_1, \ldots, x_n)$$

d.h. zu jeder Nebenbedingungsfunktion b_j gibt es einen eigenen, noch näher zu bestimmenden Parameter λ_j, der als Faktor in der Lagrange-Funktion auftritt. Diese Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ heißen Langrange-Multiplikatoren des Extremwertproblems für f unter den m Nebenbedingungen $b_1, \ldots, b_m$.

2 Für das Aufsuchen der Kandidatinnen für optimale Stellen sind dann die partiellen Ableitungen $L'_{\lambda_1}, \ldots, L'_{\lambda_m}, L'_{x_1}, \ldots, L'_{x_n}$ zu bilden und simultan gleich Null zu setzen. Damit erhält man ein Gleichungssymstem mit den n Variablen $(x_1, \ldots, x_n)$ und den m Hilfsvariablen $\lambda_1, \ldots \lambda_m$.

3 Zu jeder Lösung $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m)$ des Gleichunssystmes ist $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ Kandidatin einer Extremstelle, eine *bedingte stationäre Stelle.*

4 Es gibt hinreichende Kriterien zur Überprüfung, welche Sorte von Extremstellen die ermittelten bedingten stationäre Stellen sind. Aber die Formulierung dieser allgemeinen Kriterien, die über den behandelten Fall mit 2 Variablen und 1 Nebenbedingung hinausgehen, sprengen den Rahmen dieses Basiskurses.

Bei drei Variablen und zwei Nebenbedingungen:

- **Lagrange-Funktion:**

$$L(x, y, z; \lambda, \mu) := f(x, y, z) + \lambda \cdot b(x, y, z) + \mu \cdot c(x, y, z)$$

- **Gleichungssystem zur Ermittelung der bedingten stationären Stellen:**

$$\begin{aligned} &b(x, y, z) = 0 \\ &c(x, y, z) = 0 \\ &f'_x(x, y, z) + \lambda \cdot b'_x(x, y, z) + \mu \cdot c'_x(x, y, z) = 0 \\ &f'_y(x, y, z) + \lambda \cdot b'_y(x, y, z) + \mu \cdot c'_y(x, y, z) = 0 \\ &f'_z(x, y, z) + \lambda \cdot b'_z(x, y, z) + \mu \cdot ?c'_z(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Bsp.

Zielfunktion $f(x, y, z) = 4 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,
Nebenbedingungsfunktionen $b(x, y, z) = x + z - 100$, $c(x, y, z) = x^2/2 + y - 10$

- **Lagrange-Funktion:**

$$L(x, y, z, ; \lambda, \mu) = 4 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z + \lambda \cdot (x + z - 100) + \mu \cdot (x^2/2 + y - 10)$$

- **bedingte stationäre Stellen**

$$\left\{\begin{array}{rcl} b(x,y,z) & = & 0 \\ c(x,y,z) & = & 0 \\ f'_x(x,y,z)+\lambda\cdot b'_x(x,y,z)+\mu\cdot c'_x(x,y,z) & = & 0 \\ f'_y(x,y,z)+\lambda\cdot b'_y(x,y,z)+\mu\cdot c'_y(x,y,z) & = & 0 \\ f'_z(x,y,z)+\lambda\cdot b'_z(x,y,z)+\mu\cdot c'_z(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+z-100 & = & 0 \\ x^2/2+y-10 & = & 0 \\ 4+\lambda+\mu\cdot x & = & 0 \\ 2+\mu & = & 0 \\ 2+\lambda & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} z & = & 100-x \\ y & = & 10-x^2/2 \\ 4-2-2\cdot x & = & 0 \\ \mu & = & -2 \\ \lambda & = & -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} z & = & 99 \\ y & = & 19/2 \\ x & = & 1 \\ \mu & = & -2 \\ \lambda & = & -2 \end{array}\right\}$$

Also $(1, 19/2, 99, -2, -2)$ einzige Lösung des Gleichungssystems, und damit $(1, 19/2, 99)$ einzige bedingte stationäre Stelle.