Mathematik für Ökonomen — WS 2006-07 — Campus Duisburg

H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 1

13. Febr. 2007, 13:30–15:30 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte* ***Hilfsmittel****: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie ***Handy*** *oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß* ***geheftet*** *bleiben.*
- *Bei* ***Klausurunterbrechung*** *müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher* ***keine vorzeitige Abgabe*** *möglich.*
- *Während der Klausur können* ***keine Fragen*** *zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

Die Klausur besteht aus ***6 Aufgaben*** *mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten und aus* ***2 Aufgaben*** *(Nrn. 1 und 8) mit 10–11 erreichbaren Punkten.*
Insgesamt sind ***50 Punkte*** *erreichbar.*
Ab erreichten ***23 Punkten*** *ist die Klausur bestanden,* ***gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ____________________

NAME ____________________

Vornamen ____________________

Geburtsdatum ____________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

[4] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $7x - 4y \geq 3$

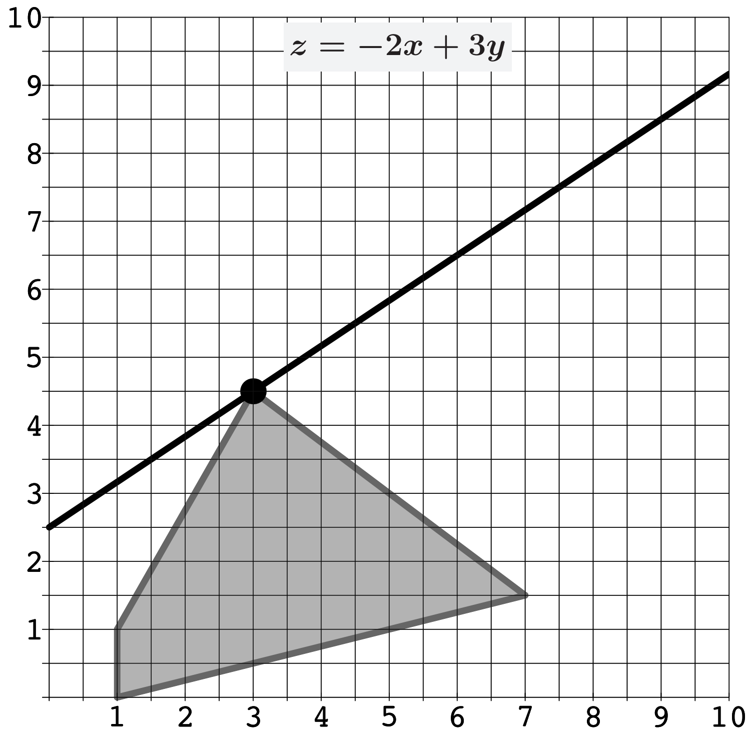
(2) $3x + 4y \leq 27$

(3) $x - 4y \leq 1$

(4) $x \geq 1$

Ergebniskontrolle

$$y \leq -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} \cdot x \quad \text{und} \quad y \leq \frac{27}{4} - \frac{3}{4} \cdot x \quad \text{und} \quad y \geq -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \quad \text{und} \quad x \geq 1$$



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = -2x + 3y$ „halbgraphisch“ : *Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n)* (x_0, y_0) *markieren, Maximalstelle* (x_0, y_0) *und Maximalwert* z_0 *rechnerisch bestimmen.*

Ergebniskontrolle

Zielgeradenschar in (x, y)-Koordinaten: $y = \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}x$.
Der Koeffizient von z (bzw. der Koefiizient von y in der Zielfunktion) ist positiv, also bedeutet Maximierung von z eine parallele Verschiebung nach oben.

Rechnerisch: $x_0 = 3, \quad y_0 = \frac{9}{2}, \quad z_0 = \frac{15}{2}$

(x_0, y_0) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der beiden Beschränkungsgeraden

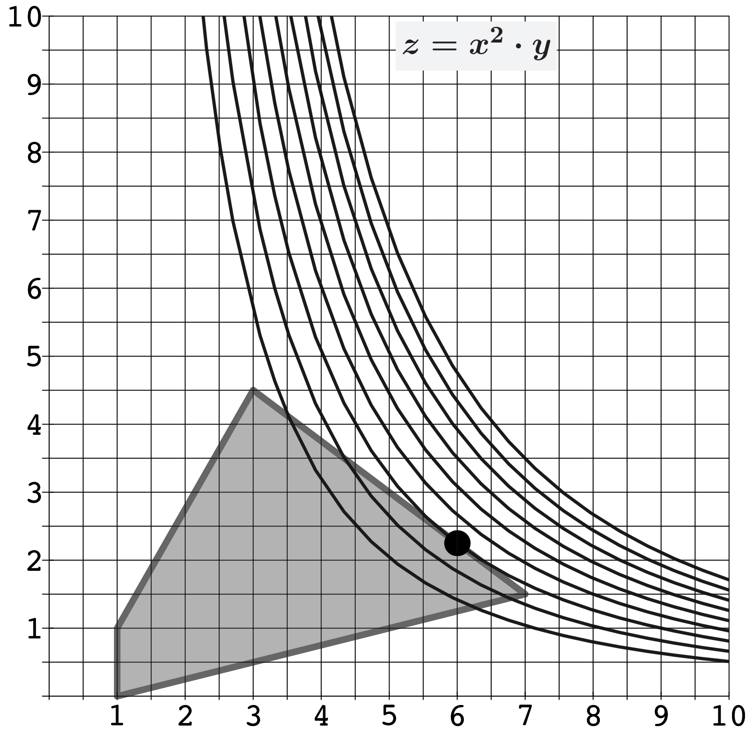
$$(1)\ 7x - 4y = 3 \quad \text{und} \quad (2)\ 3x + 4y = 27$$

z.B. so: $\quad 7x - 3 = 4y = 27 - 3x \quad \Rightarrow \quad x_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{27}{4} - \frac{3}{4}x_0 = \frac{18}{4}$

Maximalwert: $z_0 = -2x_0 + 3y_0 = \frac{15}{2}$

[3] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^2 \cdot y$ „halbgraphisch“ : *Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalen z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) *korrekt* in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

Ergebniskontrolle

$x_0 = 6, \quad y_0 = \frac{9}{4}, \quad z_0 = 81$

ergibt sich z.B. aus dem Einsetzen der Beschränkungsgeraden (2) $y = \frac{27}{4} - \frac{3}{4}x$ in die Zielfunktion:

$z = f(x) = x^2(\frac{27}{4} - \frac{3}{4}x) = \frac{27}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^3$ mit der Ableitung

$f'(x) = \frac{27}{2}x - \frac{9}{4}x^2$

$f'(x) = 0$ liefert $x = 6$ (wegen $x > 0$), also die Maximalstelle (x_0, y_0)

mit $x_0 = 6$ und $y_0 = \frac{27}{4} - \frac{3}{4}x_0 = \frac{9}{4}$ [offensichtlich: $(6, \frac{9}{4}) \in$ Lösungsmenge]

Maximalwert: $z_0 = x_0^2 \cdot y_0 = 6^2 \cdot \frac{9}{4} = 81.$

Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[2] **(a)** **(a1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^{3/2} - n^{1/2} + 2}{5n^{3/2} - 2n} = ?$ **(a2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (1 - 2^{-5})^i = ?$

[4] **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^k - \dfrac{3}{2}\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)^k = ?$ *Untere Summengrenze beachtet?*

Ergebniskontrolle

(a) (a1) 4/5; (a2) $\dfrac{1}{1-(1-2^{-5})} = 2^5$

(b) $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^2 \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}} - \dfrac{3}{2}\Big(-\dfrac{1}{3}\Big)^2 \dfrac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \dfrac{3^2 \cdot 4}{2 \cdot 4^2} - \dfrac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3^2 \cdot 4} = \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{8} = 1$

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Eine endliche Folge von jährlichen Zahlungen a_i, $i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Betrag $|d|$ *abnehmen*, soll sich in n Jahren zu einem Wert von $s_n = 30$ aufsummieren (z.B. bei einer einfachen Form der Abschreibung oder der Mittelbewirtschaftung). Hierbei sind *nur positive* Zahlungen $a_i > 0$ zugelassen.

(a) Wie errechnet sich s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $a_1 = 10$ und $|d| = 2$ werden festgelegt. Was folgt für die Anzahl n?

Ergebniskontrolle

(a) $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \qquad (= na_1 - \frac{n(n-1)}{2} \cdot |d|\,)$

(b) $a_1 = 10,\ d = -2,\ s_n = 30 \quad \Rightarrow \quad 30 = 10 \cdot n - \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = 11 \cdot n - n^2$

$\Rightarrow \quad n^2 - 11n + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad n \in \{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}, \frac{11}{2} + \frac{1}{2}\} = \{5, 6\}$

Für $n = 6$ ist $a_6 = a_1 + (6-1)d = 10 - 5 \cdot 2 = 0$ *nicht positiv*, also $n = 5$.

Aufgabe 4 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[3] **(a)** Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{2\times 1} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \end{pmatrix}_{1\times 2}$$

(1) $A \cdot B$ **(2)** $B \cdot C$ **(3)** $(\mathbf{E}_{3\times 3} - A)^T$

[2] **(b)** Sortieren Sie mit einer Matrixmultiplikation die *Zeilen* der Matrix A aus (a) *absteigend* nach ihrem *mittleren* Element.

Ergebniskontrolle

(a) **(1)** $A_{3\times 3} \cdot B_{2\times 1}$ nicht definiert **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) „Zeilenpicker“: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen M_{RZ} und M_{ZE} gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	3	2
	R_2	3	1	2

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Zwischen-	Z_1	2	1
produkte	Z_2	1	1
	Z_3	1	2

Rohstoffpreise $r = (\,r_1, r_2\,) = (\,2, 1\,)$.

[2] **(a)** Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

[2] **(b)** Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$,

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Rohstoffe	R_1	7	8
	R_2	9	8

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 38 \\ 42 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = 118$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der um 40% über dem Anfangswert liegen soll.

[2] **(a)** Gegeben: Laufzeit $n = 10$ (d.h. $K_x = K_{10}$). Erforderliche Rendite $\mathfrak{i} = p\% =$?

[3] **(b)** Gegeben: $\mathfrak{i} = 3\%$. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals $K_n \geq K_x$ erfüllen)

Hilfswerte: $1.03^{1/10} \approx 1.003$, $0.4^{1/10} \approx 0.912$, $1.4^{1/10} \approx 1.034$,
$\ln 4 \approx 1.386$, $\ln 1.03 \approx 0.030$, $\ln 1.4 \approx 0.336$]

Ergebniskontrolle $K_x = 1.4 \cdot K_0$

(a) $1.4 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+\mathfrak{i})^{10} \Leftrightarrow 1 + \mathfrak{i} = 1.4^{1/10} \approx 1.034 \Leftrightarrow \mathfrak{i} \approx 0.034 = 3.4\%$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.03)^x \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(K_x/K_0)}{\ln(1.03)} = \dfrac{\ln(1.4)}{\ln(1.03)} \approx \dfrac{0.336}{0.030} = 11.2$, also $n = 12$

Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Bestimmen Sie jeweils die x-Lösungsmenge:

[2] **(a)** $2 \leq \frac{x+2}{x} \leq 7$ <u>und</u> $x > 0$

[2] **(b)** $e^{x^2-5x+6} = 1$

Ergebniskontrolle

(a) Wegen $x > 0$ gilt: $2 \leq \frac{x+2}{x} \leq 7 \Leftrightarrow 2x \leq x+2 \leq 7x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 2$

(b) $e^{x^2-5x+6} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \; (= \ln 1) \Leftrightarrow x \in \{2, 3\}$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] **(a)** Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte.) *Geprüft wird vorrangig die Beherrschung der Methode — eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probe gemacht?

Ergebniskontrolle

x_1	x_2	x_3 =	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	*Protokollbsp.*
1	−1	1	1	0	0	*I*
1	0	1	0	1	0	*II*
2	−1	0	0	0	1	*III*
1	−1	1	1	0	0	**I**
0	1	0	−1	1	0	$II - 1 \cdot \mathbf{I}$
0	1	−2	−2	0	1	$III - 2 \cdot \mathbf{I}$
1	0	1	0	1	0	$I + 1 \cdot \mathbf{II}$
0	1	0	−1	1	0	**II**
0	0	−2	−1	−1	1	$III - 1 \cdot \mathbf{II}$
1	0	0	−1/2	1/2	1/2	$I + 1/2 \cdot \mathbf{III}$
0	1	0	−1	1	0	*II*
0	0	1	1/2	1/2	−1/2	$-1/2 \cdot \mathbf{III}$

Probe: $B^{-1} \cdot B = E_{3\times3}$ oder $B \cdot B^{-1} = E_{3\times3}$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \left[= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

[3] **(b)** Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines simultan durchgeführten Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmengen L_b und L_c der zugehörigen linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = c$.

$$A\left\{\begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & c \\ \hline 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 1 & 4 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c}\text{Gauß-Algo-}\\ \text{rithmus}\\ \longrightarrow \cdots \longrightarrow\end{array} \quad \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* & c^* \\ \hline 1 & 0 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

[2] **(c)** $\mathbf{E}$ bezeichne die $n \times n$-Einheitsmatrix und D eine $n \times n$-Matrix, mit der die Matrix $(\mathbf{E} - D)$ invertierbar wird.
Lösen Sie mit Hilfe dieser Information die folgende Matrixgleichung nach X auf:

$$X - D \cdot X = \mathbf{E}$$

Ergebniskontrolle

(b) $A \cdot x = b$ ist nicht lösbar, da $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \neq 1$, $L_b = \emptyset$
Beim LGS $A \cdot x = c$ sind zwei der drei Variablen durch dieses LGS festgelegt, eine ist frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_c = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{lcccc} x_1 & = & 4 & + & 7\,x_3 \\ x_2 & = & -3 & - & 6\,x_3 \\ \multicolumn{5}{l}{x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar}} \end{array} \right\}$$

(c) $X - D \cdot X = \mathbf{E} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{E} - D) \cdot X = \mathbf{E} \;\Leftrightarrow\; X = (\mathbf{E} - D)^{-1} \cdot \mathbf{E} \quad [\, = (\mathbf{E} - D)^{-1}\,]$