H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 2

13. Febr. 2007, 16–18 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben** zu jeweils 4–6 erreichbaren Punkten.*
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________

NAME ______________________

Vornamen ______________________

Geburtsdatum ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Gegeben $f(x) = 1 + x \cdot e^{2-x}$ mit $D(f) = [0,\, 2]$.

[3] **(a)** Bestimmen Sie alle Extremalstellen und die zugehörige Funktionswerte von f über dem angegebenen Definitionsbereich.

[3] **(b)** Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten (Konvexität/Konkavität) von f und skizzieren Sie die Funktion f.
(Nur die berechneten Funktionswerte aus (a) und die Information aus (b) benützen, bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen)

(Ersatzvorlage auf Anhangseite 1 oben)

Ergebniskontrolle

Funktionswerte am Rand: $f(0) = 1,\ f(2) = 3$

$f'(x) = e^{2-x}(1-x) = 0, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad 1 \in D(f),$

$f''(x) = e^{2-x}(x-2) \leq 0$ für alle $x \in D(f)$, also f konkav über $D(f)$

$f''(1) = -e < 0$, also lokales Maximum $f(1) = 1 + e$,

globales Maximum $f(1) = 1 + e \approx 3.718$, globales Minimum $f(0) = 1$

Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

[1] **(a)** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1+x-x^2}{x-2x^2}$

[3] **(b)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x-1}+e^{1-x}-2}{(x-1)^2}$

Oben war in der Klausur ein Tippfehler, der die Aufgabe viel leichter macht (also glücklicherweise zu Ihrem Vorteil), nämlich $x \to 0$ statt $x \to 1$.

So war es gemeint (nehmen Sie dies als Testaufgabe): $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}+e^{1-x}-2}{(x-1)^2}$

Ergebniskontrolle

(a) 1/2

(b) Wie es in der Klausur (einfacher) steht und nun gilt:
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-1}+e^{1-x}-2}{(x-1)^2} = \frac{e^{0-1}+e^{1-0}-2}{(0-1)^2} = e^{-1}+e-2$

(b) So wie es gemeint war (Testaufgabe):
Zweimal LHR $\frac{0}{0}$: $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}+e^{1-x}-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-e^{1-x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}+e^{1-x}}{2} = 1$

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt. Legen Sie die Werte der Zahlen α und β rechnerisch so fest, daß die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 1$ *stetig* wird, oder — falls dies nicht möglich ist — *rechtsseitig stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x^{3/2} - \alpha & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{für } x = 1 \\ \dfrac{\alpha}{1+x} & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle

LGW in $x_0 = 1$: $\beta - \alpha$, Funktionswert in $x_0 = 1$ (FW): $3/4$, RGW in $x_0 = 1$: $\alpha/2$

f stetig in $x_0 = 1 \Leftrightarrow$ LGW=FW=RGW in x_0, d.h. $\beta - \alpha = 3/4 = \alpha/2$

also f stetig in x_0 für $\alpha = 3/2$, $\beta = 9/4$

Aufgabe 4 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[1] **(a)** Ändert sich der Wert des nachfolgend in (b) gefragten Integrals, wenn dort $f(1) = 3/2$ statt $f(1) = -1$ gesetzt wird?

Ohne Begründung ankreuzen: Ja ☐ Nein ☐

[5] **(b)** Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(t)\,dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} + t^2 + e^{-t/2} & \text{für } 0 \le t < 1 \\ -1 & \text{für } t = 1 \\ 1 + t + t^2/2 & \text{für } 1 < t \le 2 \end{cases}$

Hilfswert: $e^{-1/2} \approx 3/5$

Ergebniskontrolle

(a) Nein

(b)
$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(t)\,dt &= \int_0^1 (\tfrac{1}{5} + t^2 + e^{-t/2})\,dt + \int_1^2 (1 + t + \tfrac{t^2}{2})\,dt \\
&= [\tfrac{1}{5}t + \tfrac{1}{3}t^3 - 2e^{-t/2}]_0^1 + [t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3]_1^2 \\
&= (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3} - \underbrace{2e^{-1/2}}_{\approx\, 6/5}) - (-2) + (2 + 2 + \tfrac{8}{6}) - (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}) \\
&\approx 1/3 - 1 + 2 + 4 + 4/3 - 1 - 2/3 = 5
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Für $0 \leq x \leq 45$ sei $F(x) := F(45) - \int_x^{45} \frac{90}{t+15}\, dt$

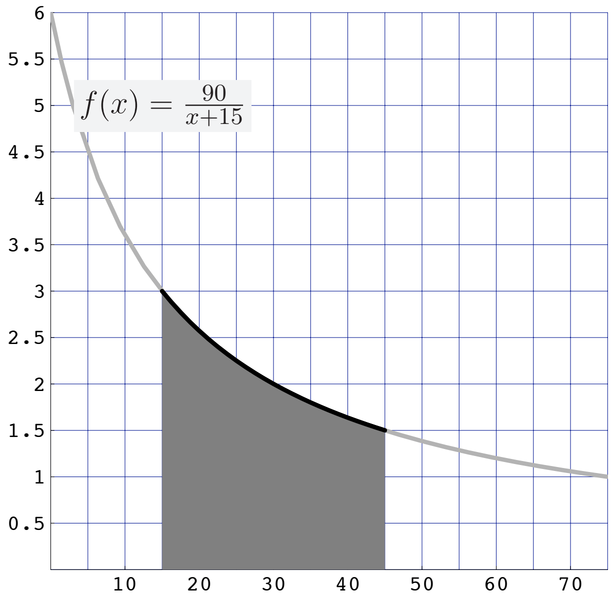
[3] **(a)** Berechnen Sie den Wert $F(15)$

[2] **(b)** Skizzieren Sie grob das in a) durch das Integral $\int_{15}^{45} \frac{90}{t+15}\, dt$ berechnete Flächenstück

Ergebniskontrolle

$\int_{15}^{45} \frac{90}{t+15}\, dt = 90\, [\ln(t+15)]_{15}^{45} = 90(\ln(60) - \ln(30)) = 90 \ln 2$

$F(15) = F(45) - \int_{15}^{45} \frac{90}{t+15}\, dt = F(45) - 90 \ln 2$



(Ersatzvorlage auf Anhangseite 1 unten)

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[2] **(a)** Bestimmen Sie die *Wachstumsrate* der Funktion

$$f(x) = 3 + \tfrac{3}{2}\ln(x)$$

an der Stelle $x = e$.

[3] **(b)** Bestimmen Sie die *Elastizität* $\mathcal{E}^f(x)$ der Funktion

$$f(x) = 3x^2 + x\,e^{1-x}$$

und damit die ungefähre *relative Änderung* des Funktionswertes $f(x)$ beim Übergang von $x = 1$ (Basiswert) zu $x = 1.05$.

Ergebniskontrolle

(a) $W^f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{2x} \cdot \frac{1}{3+\frac{3}{2}\ln x}$; $\quad W^f(e) = \frac{3}{2e} \cdot \frac{1}{3+\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\cdot e}$

(b) $f'(x) = 6x + 1 \cdot e^{1-x} + xe^{1-x}(-1) = 6x + e^{1-x}(1-x)$

$\mathcal{E}^f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{6x+e^{1-x}(1-x)}{3x^2+x\,e^{1-x}} \cdot x$

$\frac{f(1.05)-f(1)}{f(1)} \approx \mathcal{E}^f(1) \cdot \frac{1.05-1}{1} = \frac{3}{2} \cdot 5\% = 7.5\%$ [oder z.B. $= 1.5 \cdot 0.05 = 0.075 = 7.5\%$]

Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = 1 + \ln(1 + 2x + 4y) \qquad (x, y > 0)$

[2] **(a)** das totale Differential $df(x,y)$

[2] **(b)** die Tangentialebene zu f im Ausgangspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(0.05,\, 0.1)$.

Ergebniskontrolle

(a) $df(x,y) = \dfrac{2\,dx + 4\,dy}{1 + 2x + 4y}$

(b) $T^{f}_{(0,0)}(x,y) = f(0,0) + df_{(0,0)}(x,y) = 1 + 2\,dx + 4\,dy;$

$f(0.05,\, 0.1) \approx T^{f}_{(0,0)}(0.05, 0.1) = 1 + 2 \cdot 0.05 + 4 \cdot 0.1 = 1.5$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = x^{2/3}y^{1/3} \quad (x > 0, y > 0)$

[2] **(a)** Bestimmen Sie die partielle Elastizität von f bzgl. der Variablen y

[3] **(b)** Die Abhängigkeit zwischen den Variablen x und y sei auf dem Niveau $z = 2$ gegeben durch eine implizite Darstellung mittels der obigen Funktion, d.h.

$$2 = x^{2/3}y^{1/3}.$$

Berechnen Sie auf dem Niveau $z = 2$ die Grenzrate der Substitution der Variablen x durch die Variable y: $\quad \dfrac{dy}{dx}(x,y) = ?$

Geben Sie <u>einen</u> Punkt (x_0, y_0) an, der die Niveaubedingung erfüllt, und für diesen den Wert $\frac{dy}{dx}(x_0, y_0)$.

Ergebniskontrolle

(a) $\mathcal{E}_y^f(x,y) = \frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)} \cdot y = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{2/3}y^{-2/3}}{x^{2/3}y^{1/3}} \cdot y = \frac{1}{3}$

(b) $\dfrac{dy}{dx}(x,y) = -\dfrac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\dfrac{\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}}{\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}} = -\dfrac{2y}{x};$

z.B.: $f(1,8) = 2$ mit $\dfrac{dy}{dx}(1,8) = -16$ oder $f(2,2) = 2$ mit $\dfrac{dy}{dx}(2,2) = -2$

Aufgabe 9 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = 2 - x^2/2 - y^4/4 + xy$
auf Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> *und* die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle

$f'_x(x,y) = -x + y, \quad f'_y(x,y) = -y^3 + x;$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ x = y^3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y = y^3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y = 0 \ \text{ oder } \ y = \pm 1 \end{array} \right\},$$

also sind die stationären Punkte: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (-1,-1)$ und $P_3 = (1,1)$;

$f''_{xx}(x,y) = -1, \quad f''_{yy}(x,y) = -3y^2, \quad f''_{xy}(x,y) = 1 = f''_{yx}(x,y)$; $H_D(x,y) = 3y^2 - 1$

$H_D(0,0) = -1 < 0$; somit ist $(0,0)$ Sattelpunktstelle; Funktionswert $f(0,0) = 2$;

$H_D(-1,-1) = H_D(1,1) = 2 > 0$ und $f''_{xx}(-1,-1) = f''_{xx}(1,1) = -1 < 0$,

demnach sind $(-1,-1)$ und $(1,1)$ lokale Maximalstellen;
zugehörige Maximalwerte $f(-1,-1) = \frac{9}{4} = f(1,1)$

Aufgabe 10 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] **(a)** Berechnen Sie zu der Funktion

$$f(x) = e^{1-(x+1)^2}$$

das Taylorpolynom vom Grad $n = 2$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

[1] **(b)** Approximieren Sie mit Hilfe des berechneten Taylorpolynoms den Funktionswert $f(\frac{1}{10}) = e^{-0.21}$.

Ergebniskontrolle

(a) $f(0) = e^0 = 1,$ [oder vorher umformen: $f(x) = e^{-2x-x^2}$]

$f'(x) = -2(1+x) \cdot e^{1-(x+1)^2}, \quad f'(0) = -2$

$f''(x) = -2e^{1-(x+1)^2}(1 - 2(x+1)^2), \quad f''(0) = 2$

$T_2^f(x; 0) := f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 = 1 - 2x + x^2$ [$= (1-x)^2$]

(b) $e^{-0.21} = f(\frac{1}{10}) \approx T_2^f(\frac{1}{10}; 0) = 1 - \frac{2}{10} + (\frac{1}{10})^2 = 0.81$ [$= (1 - \frac{1}{10})^2$]

[zum Vergleich: der Fehler ist ungefähr $6/10^4$]