Mathematik für Ökonomen — WS 2007/08 — Campus Duisburg

U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 1

12. Febr. 2008, 13:30–15:30 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben** mit jeweils 4–5 erreichbaren Punkten und aus **2 Aufgaben** (Nrn. 1 und 8) mit je 10–12 erreichbaren Punkten.*
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________

NAME ______________________

Vornamen ______________________

Geburtsdatum ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service".

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y - x \geq -1$

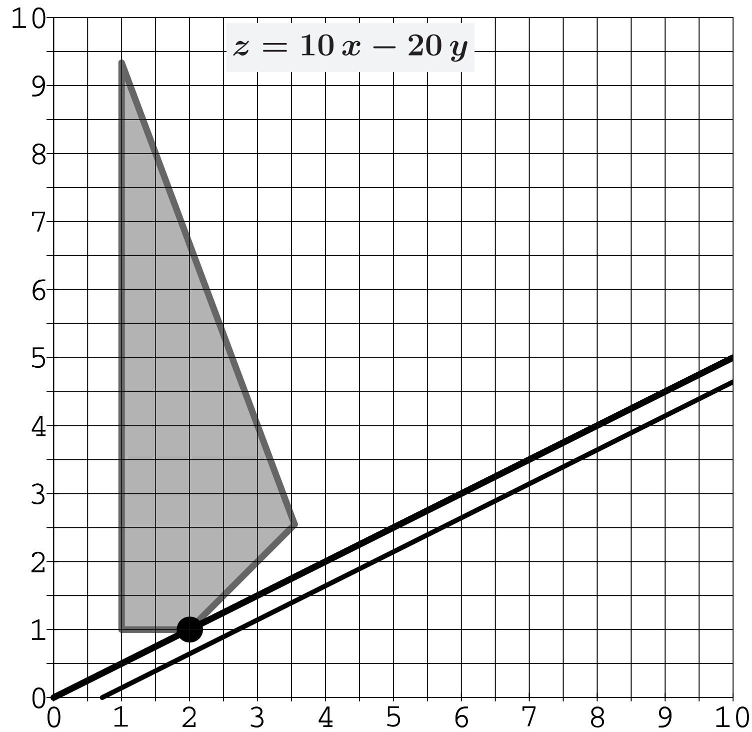
(2) $3y + 8x \leq 36$

(3) $y \geq 1$

(4) $x \geq 1$

Ergebniskontrolle

$$y \geq -1 + x \quad \text{und} \quad y \leq 12 - \tfrac{8}{3}x \quad \text{und} \quad y \geq 1 \quad \text{und} \quad x \geq 1$$



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = 10x - 20y}$ „halbgraphisch“ : *Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Ergebniskontrolle

Zielgeradenschar in (x, y)-Koordinaten: $y = -\frac{1}{20}z + \frac{1}{2}x$.
Der Koeffizient von z (bzw. der Koeffizient von y in der Zielfunktion) ist negativ, also bedeutet Maximierung von z eine parallele Verschiebung nach unten.

Rechnerisch: $x_0 = 2, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 0$

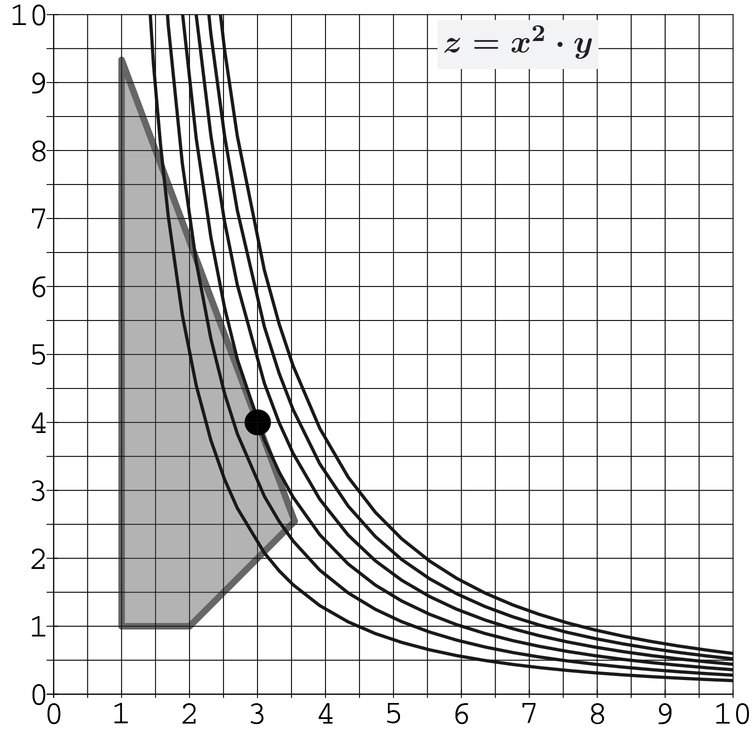
(x_0, y_0) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Beschränkungslinien

$$(1)\ y - x = -1 \quad \text{und} \quad (3)\ y = 1$$

z.B. so: $1 = y = -1 + x$, also $y_0 = 1$ und $x_0 = 2$.
Maximalwert: $z_0 = 10\,x_0 - 20\,y_0 = 0$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = x^2 \cdot y}$ „halbgraphisch“ : *Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalen z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) *korrekt* in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

Ergebniskontrolle

$x_0 = 3, \quad y_0 = 4, \quad z_0 = 36$

ergibt sich z.B. aus dem Einsetzen der Beschränkungsgeraden (2) $y = 12 - \frac{8}{3}x$ in die Zielfunktion:

$z = f(x) = x^2(12 - \frac{8}{3}x) = 12x^2 - \frac{8}{3}x^3$ mit der Ableitung

$f'(x) = 24\,x - 8\,x^2 \quad (x > 0)$

$f'(x) = 0$ liefert $x = 3$, also die Maximalstelle (x_0, y_0)

mit $x_0 = 3$ und $y_0 = 12 - \frac{8}{3}x_0 = 4$ [offensichtlich: $(3, 4) \in$ Lösungsmenge]

Maximalwert: $z_0 = x_0^2 \cdot y_0 = 3^2 \cdot 4 = 36.$

Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[2] **(a)** **(a1)** $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^{4/3} - n^{1/3} + 7}{4n^{4/3} - 17} = ?$ **(a2)** $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 0.95^k = ?$

[3] **(b)** $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{7}{9}\left(\frac{3}{10}\right)^k - \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^k = ?$ *Untere Summengrenze beachtet?*

Ergebniskontrolle

(a) **(a1)** $3/4$ **(a2)** $\frac{1}{1-0.95} = \frac{100}{5} = 20$

(b) $\frac{7}{9}\left(\frac{3}{10}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{3}{10}} - \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 10}{9 \cdot 10^2 \cdot 7} - \frac{9 \cdot 1 \cdot 10}{10 \cdot 10^2 \cdot 9} = \frac{9}{100}$

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[2] **(a)** Für welche Zahl q ist $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + q + \ldots + q^n) = 50$?

[3] **(b)** Eine endliche Folge von jährlichen Zahlungen a_i, $i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Betrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Jahren zu einem Wert von $s_n = 480$ aufsummieren (z.B. bei einer einfachen Form der Abschreibung oder Mittelbewirtschaftung).

(b1) Wie errechnet sich s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b2) $n = 10$ Jahre und $|d| = 4$ werden festgelegt.
Welchen Wert hat d und welchen Wert muss a_1 (die erste Zahlung) haben?

Ergebniskontrolle

(a) $\dfrac{1}{1-q} = 50 \;\Leftrightarrow\; 1 - q = \dfrac{1}{50} \;\Leftrightarrow\; q = \dfrac{49}{50} \quad [= 0.98]$

(b1) $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithmetische Summe]

(b2) $d = -4$ $(= -|d|$, da die Zahlungen abnehmen)
$n = 10,\ d = -4,\ s_n = 480 \;\Rightarrow\; 480 = 10\,a_1 + \frac{10\cdot 9}{2} \cdot (-4) = 10\,a_1 - 180 \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{660}{10} = 66$

[5] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert" ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

(1) $A \cdot C$ **(2)** $(\mathbf{E}_{3\times 3} - A)^T$ **(3)** $A + B \cdot C$

Ergebniskontrolle

(1) $A_{3\times 3} \cdot C_{1\times 3}$ nicht definiert **(2)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$

Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Bei einem zweistufigen Produktionsprozeß sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen M_{RZ} und M_{ZE} gegeben:

		Zwischenprod.	
		Z_1	Z_2
Rohstoffe	R_1	2	1
	R_2	4	0
	R_3	2	3

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischen-	Z_1	1	2	1
produkte	Z_2	2	1	2

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2, r_3) = (2,\ 4,\ 3)$.

[2] **(a)** Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

[2] **(b)** Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Rohstoffe	R_1	4	5	4
	R_2	4	8	4
	R_2	8	7	8

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 42 \\ 48 \\ 78 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = 510$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins).

[2] **(a)** Gegeben: Laufzeit $n = 2$ und eine Zinsstaffel von $\mathfrak{i}_1 = p_1\% = 0\%$ für das erste und $\mathfrak{i}_2 = p_2 = 21\%$ für das zweite Jahr. Rendite $\mathfrak{i} = p\% =?$

[3] **(b)** Gegeben: $\mathfrak{i} = 3\%$, ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der den Anfangswert K_0 um 30% erhöhen soll.
Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[*Hilfswerte:* $\ln 0.03 \approx -3.5$, $\ln 0.3 \approx -1.2$, $\ln 1.03 \approx 0.03$, $\ln 1.3 \approx 0.26$, $\ln 3 \approx 1.1$]

Ergebniskontrolle

(a) $1 + \mathfrak{i} = (1.0 \cdot 1.21)^{1/2} = 1.1$ [denn $(1 + \mathfrak{i})^2 \stackrel{!}{=} (1 + \mathfrak{i}_1)(1 + \mathfrak{i}_2)$]. Also $\mathfrak{i} = 0.1 = 10\%$.

(b) $K_x = 1.3 \cdot K_0$;

$$K_x = K_0 \cdot (1 + \mathfrak{i})^x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\ln(K_x/K_0)}{\ln(1 + \mathfrak{i})} = \frac{\ln(1.3)}{\ln(1.03)} \approx \frac{0.26}{0.03} = 8 + \frac{2}{3}; \quad n = \lceil x \rceil = 9.$$

Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie die (simultane) x-Lösungsmenge für

$$1 \;\leq\; \frac{8\,x}{x+7} \;\leq\; 4 \;\; \underline{\text{und}} \;\; x \geq 2$$

Ergebniskontrolle Wegen der Bedingung $x \geq 2$ ist der Nenner $x + 7 > 0$, also
$1 \leq \frac{8x}{x+7} \leq 4 \underset{x+7>0}{\Leftrightarrow} 1x + 7 \leq 8x \leq 4x + 28 \;\Leftrightarrow\; (7 \leq 7x \text{ und } 4x \leq 28) \;\Leftrightarrow\; 1 \leq x \leq 7.$
$\mathbb{L} = \{x : x \geq 2 \text{ und } 1 \leq x \leq 7\} = \{x : 2 \leq x \leq 7\}$ [andere Darstellung z.B. $\mathbb{L} = [2, 7]$]

[8] **(a)** Bestimmen Sie die Lösungsmengen der drei folgenden linearen Gleichungssysteme <u>simultan</u> mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte.)
Geprüft wird (an einem einfachen Beispiel) die Beherrschung der <u>Methode</u> — eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$\begin{array}{rcrcrcl|c|c|c|}
 & & & & & & & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\
1 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & & 1 & 0 & 0 \\
1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & & 0 & 1 & 0 \\
2 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Ergebniskontrolle

	x_1	x_2	$x_3 =$	a	b	c	*Protokollbsp.*
A	1	1	0	1	0	0	I
	1	0	2	0	1	0	II
	2	1	2	1	1	1	III
	1	1	0	1	0	0	$\mathbf{I}$
	0	-1	2	-1	1	0	$II - 1 \cdot \mathbf{I}$
	0	-1	2	-1	1	1	$III - 2 \cdot \mathbf{I}$
	1	1	0	1	0	0	I
	0	1	-2	1	-1	0	$\mathbf{II} \cdot (-1)$
	0	-1	2	-1	1	1	III
	1	0	2	0	1	0	$I - 1 \cdot \mathbf{II}$
	0	1	-2	1	-1	0	$\mathbf{II}$
	0	0	0	0	0	1	$III + 1 \cdot \mathbf{II}$

$A \cdot x = c$ ist nicht lösbar, da $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \neq 1$, $L_c = \emptyset$.
Bei den beiden LGS $A \cdot x = a$ und $A \cdot x = b$ sind zwei der drei Variablen durch dieses LGS festgelegt, jeweils eine ist frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmengen:

$$L_a = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_3 \\ x_2 & = & 1 + 2x_3 \\ \multicolumn{3}{r}{x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar}} \end{array} \right\}, \quad L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - 2x_3 \\ x_2 & = & -1 + 2x_3 \\ \multicolumn{3}{r}{x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar}} \end{array} \right\}$$

[4] **(b)** Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei X unbekannt ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

(b1) Welche Dimension muss X haben, damit die Gleichung definiert ist?

(b1) Lösen Sie die Gleichung nach X auf.

Ergebniskontrolle

(b1) 2×3 (2 Zeilen und drei Spalten)

(b2) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$