**U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik**

# Klausur Mathematik 2

**12. Febr. 2008, 16:00–18:00 Uhr (120 Minuten)**

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muss **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **5 Aufgaben** mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten und aus **3 Aufgaben** mit je 8–11 erreichbaren Punkten (Aufgaben 5, 6, 8).*
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

**Matrikelnummer** ______________________

**NAME** ______________________

**Vornamen** ______________________

**Geburtsdatum** ______________________

*Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:*

**Unterschrift** ______________________

## BITTE BEACHTEN

**Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teilweise sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.**

**Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.**
**Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.**

## Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Die folgende Funktion $f$ ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen $\alpha$ und $\beta$ rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot x}{1+x} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \alpha/2 & \text{für } x = 1 \\ \beta \cdot x + 2 \cdot x^{-1/2} & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

*Ergebniskontrolle*

LGW in $x_0 = 1$: 1, Funktionswert in $x_0 = 1$ (FW): $\alpha/2$, RGW in $x_0 = 1$: $\beta + 2$

$f$ stetig in $x_0 = 1 \Leftrightarrow$ LGW=FW=RGW in $x_0$, d.h. $1 = \alpha/2$ und $\alpha/2 = \beta + 2$,

also $f$ stetig in $x_0$ mit der Festlegung: $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

## Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Gegeben $f(x) = 1 + x \cdot e^{2-x}$ mit $D(f) = [0,\ 4]$. *Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!*

Die Funktion hat die Ableitung $f'(x) = e^{2-x} + xe^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x}(1-x)$
und die lokale Maximalstelle $x = 1$ mit Wert $f(1) = 1 + e$.

[4] **(a)** Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten (Konvexität/Konkavität) von $f$ und skizzieren Sie $f$.
*[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(0) = 1$, $f(0.5) \approx 3.24$, $f(1) \approx 3.72$, $f(3.5) \approx 1.78$, $f(4) \approx 1.54$]*


*(Ersatzvorlage auf Anhangseite 1 oben links)*

*Ergebniskontrolle*

$f''(x) = -e^{2-x}(1-x) - e^{2-x} = e^{2-x}(x-2)$. Da $e^{2-x} > 0$, gilt:
Vorzeichen von $f''(x)$ = Vorzeichen von $(x-2)$ für alle $x \in D(f) = [0, 4]$;

also $f''(x) \leq 0$ für $x \leq 2$, d.h. $f$ konkav über $[0, 2]$,
und $f''(x) \geq 0$ für $x \geq 2$, d.h. $f$ konvex über $[2, 4]$;
Wendepunkt an der Stelle $x = 2$ mit Wert $f(2) = 1 + 2e^0 = 3$.

[2] **(b)** Bestimmen Sie die Elastizität $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion $f$. Mit (ungefähr) welchem Faktor überträgt sich an der Basisstelle $x_0 = 2$ eine relative Erhöhung von $x$ um $p\%$ auf die relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(2)$?

*Ergebniskontrolle*

$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \dfrac{e^{2-x}(1-x)}{1 + x \cdot e^{2-x}}$; an der Basisstelle $x_0 = 2$ ist $\dfrac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(2) \cdot p\%$;

Faktor: $\mathcal{E}^f(2) = 2 \cdot \dfrac{f'(2)}{f(2)} = 2 \cdot \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{2}{3}$.

## Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2}{e^{x-1} + e^{1-x} + (1/x) + x - 4}$

*Ergebniskontrolle*

Zweimal LHR $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)^2}{e^{x-1} + e^{1-x} + (1/x) + x - 4}$

$$\stackrel{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1} \frac{2(x-1)}{e^{x-1} - e^{1-x} - (1/x^2) + 1} \stackrel{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1} \frac{2}{e^{x-1} + e^{1-x} + (2/x^3)} = \frac{2}{1+1+2} = \frac{1}{2}$$

## Aufgabe 4 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad $n = 2$) der Funktion $f(x) = x^{1/4}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für $f(1.4) = 1.4^{1/4}$.

*Ergebniskontrolle*

$f(1) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \quad f'(1) = \frac{1}{4}, \quad f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-7/4}, \quad f''(1) = -\frac{3}{16}$

$T_2^f(x;1) := f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 = 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2$

$1.4^{1/4} = f(1.4) \approx T_2^f(1.4;1) = 1 + \frac{1}{4}(0.4) - \frac{3}{32}(0.4)^2 = 1.1 - 3 \cdot 0.005 = 1.085$

[ *zum Vergleich:* $1.4^{1/4} \approx 1.08776$ ]

## Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[1] **(a)** Ändert sich der Wert des in (b) gefragten Integrals, wenn dort der Funktionswert $f(1) = \ln 3$ statt $f(1) = 1/2$ gesetzt wird?

*<u>Ohne</u> Begründung ankreuzen:* Ja ◻ Nein ◻

[3] **(b)** Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(t)\,dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+t} & \text{für } 0 < t < 1 \\ 1/2 & \text{für } t = 1 \\ \ln 2 & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$

*Ergebniskontrolle*

(a) Nein

(b) $\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt + \int_1^2 2\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 + (\ln 2)[\,t\,]_1^2$

$= \ln 2 - \ln 1 + (\ln 2)(2-1) = 2 \cdot \ln 2$

[5] **(c)** Für $30 \leq x \leq 80$ sei $F(x) := F(30) + \int_{30}^{x} (1 + \frac{t}{2})^{1/2}\, dt$.

**(c1)** Berechnen Sie den Wert $F(70)$

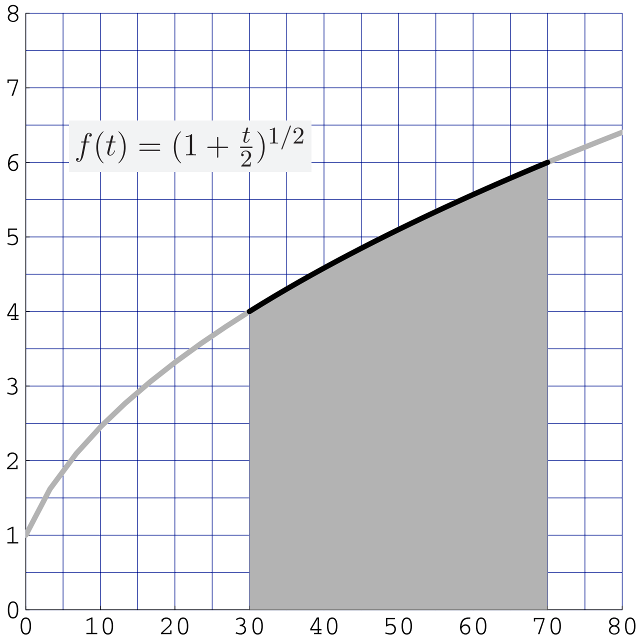
**(c2)** Skizzieren Sie *grob* das in c1) durch das Integral $\int_{30}^{70} (1 + \frac{t}{2})^{1/2}\, dt$ berechnete Flächenstück

*Ergebniskontrolle*

$F(70) = F(30) + \int_{30}^{70} (1 + \frac{t}{2})^{1/2}\, dt$, mit

$\int_{30}^{70} (1 + \frac{t}{2})^{1/2}\, dt = 2 \cdot \frac{2}{3}[(1 + \frac{t}{2})^{3/2}]_{30}^{70} = \frac{4}{3}(36^{3/2} - 16^{3/2}) = \frac{4}{3}(6^3 - 4^3) \quad [= \frac{608}{3}]$

Skizze: Typ „$\sqrt{x}$“ z.B. mit den Hilfspunkten $f(30) = 4$, $f(48) = 5$, $f(70) = 6$




*(Ersatzvorlage auf Anhangseite 1 oben rechts)*

## Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] **(a)** Gegeben sind die Funktion $f(x,y) = 3 - \ln(y) + x^2 y e^{x-y}$ $(x > 0,\ y > 0)$ <u>und</u> ihre partiellen Ableitungen $f'_x(x,y) = xy(2+x)e^{x-y}$ und $f'_y(x,y) = -\frac{1}{y}+x^2(1-y)e^{x-y}$.

*Beachte: Die partiellen Ableitungen sind gegeben!*

**(a1)** Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion $f$ an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (1,1)$, wenn sich dort die $x$-Variable um $-5\%$ verändert und die $y$-Variable um $+1\%$ verändert.

**(a2)** Die Abhängigkeit zwischen $x$ und $y$ sei auf dem konstantenNiveau $z$ gegeben durch eine implizite Darstellung mittels der obigen Funktion, d.h.

$$z = 3 - \ln(y) + x^2 y e^{x-y}.$$

Für die Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ ist die Niveaubedingung $z = 4$ erfüllt. Berechnen Sie an dieser Stelle die Grenzrate der Substitution von $x$ durch $y$: $\frac{dy}{dx}(1,1) = ?$

*Ergebniskontrolle*

**(a1)** $\frac{df}{f} \approx x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)} \cdot \frac{dx}{x_0} + y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)} \cdot \frac{dy}{y_0}$; $\frac{df}{f} \approx \frac{f'_x(1,1)}{f(1,1)} \cdot (-5\%) + \frac{f'_y(1,1)}{f(1,1)} \cdot (+1\%)$;
$f'_x(1,1) = 3$, $f'_y(1,1) = -1$, $f(1,1) = 4$. Also $\frac{df}{f} \approx (\frac{3}{4})(-5\%)+(-\frac{1}{4})(+1\%) = -4\%$, d.h. Veränderung von $f(1,1) = 4$ um ca. $-4\%$ auf $f(0.95, 1.01)$.

**(a2)** $\frac{dy}{dx}(x,y) = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\frac{xy(2+x)e^{x-y}}{-\frac{1}{y}+x^2(1-y)e^{x-y}}$; $\frac{dy}{dx}(1,1) = 3$ entlang des Niveaus $z = 4$.

[5] **(b)** Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = y^2 \cdot e^{x-2y}$ $(x, y > 0)$
die partiellen Ableitungen $f'_x$, $f'_y$, sowie $f''_{xx}$, $f''_{yy}$ und $f''_{xy}$ (oder $f''_{yx}$).

*Ergebniskontrolle*

$f'_x(x,y) = y^2 \cdot e^{x-2y}$
$f'_y(x,y) = 2y \cdot e^{x-2y} + y^2 \cdot e^{x-2y}(-2) \qquad [= 2y(1-y)e^{x-2y}]$
$f''_{xx}(x,y) = y^2 \cdot e^{x-2y}$
$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 2y \cdot e^{x-2y} + y^2 \cdot e^{x-2y}(-2) \qquad [= 2y(1-y)e^{x-2y}]$
$f''_{yy}(x,y) = 2e^{x-2y} - 4y \cdot e^{x-2y} - 4y \cdot e^{x-2y} + 4y^2 \cdot e^{x-2y} = 2(1-4y+2y^2)e^{x-2y}$

## Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Zu lösen ist (z.B. zur Berechnung einer Rendite $\mathfrak{i}_{\text{eff}} = x - 1$) eine Bestimmungsgleichung für $x$:

$$x^5 + 2x \overset{!}{=} 3.35$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von $x$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens, *d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 1$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (diese nicht ausrechnen).*

*Ergebniskontrolle*

$f(x) = x^5 + 2x - 3.35,\ \ f'(x) = 5x^4 + 2;\qquad x_{n+1} = x_n - (\, f(x_n)/f'(x_n)\,);\ x_0 = 1;$

Erste Iteration: $x_1 = 1 - (\, f(1)/f'(1)\,) = 1 - (\, -0.35/7\,) = 1 + \frac{35}{7 \cdot 100} = 1.05;$

Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - (\, f(x_1)/f'(x_1)\,) = 1.05 - (\, f(1.05)/f'(1.05)\,).$

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = y - \ln(y) + \tfrac{1}{2}\cdot(x-2)^2\cdot(2-y) \qquad (x>0\,,\,y>0)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> *und* die zugehörigen Funktionswerte)

*Ergebniskontrolle*

$f'_x(x,y) = (x-2)(2-y), \quad f'_y(x,y) = 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}(x-2)^2;$

$$\left\{\begin{matrix} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} 0 & = (x-2)(2-y) \\ 1-\frac{1}{y} & = \frac{1}{2}(x-2)^2 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} x = 2 \ \underline{\text{oder}} \ y = 2 \\ 1-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}(x-2)^2 \end{matrix}\right\}$$

*Fall 1:* $x = 2$ <u>und</u> $1 - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}(x-2)^2 \;\Leftrightarrow\; x = 2$ <u>und</u> $1 - \frac{1}{y} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$ <u>und</u> $y = 1$.

*Fall 2:* $y = 2$ <u>und</u> $1 - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}(x-2)^2$

$\Leftrightarrow\; y = 2$ <u>und</u> $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-2)^2 \;\Leftrightarrow\; y = 2$ <u>und</u> $x - 2 = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; y = 2$ <u>und</u> $x = 2 \pm 1$.

Also sind die stationären Punkte: $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (1,2)$ und $P_3 = (3,2)$;

$f''_{xx}(x,y) = 2 - y, \quad f''_{yy}(x,y) = 1/y^2, \quad f''_{xy}(x,y) = 2 - x = f''_{yx}(x,y);$

$H_D(x,y) = \frac{2-y}{y^2} - (2-x)^2;$

$H_D(1,2) = H_D(3,2) = -1 < 0; \;\; H_D(2,1) = 1 > 0, \; f''_{xx}(2,1) = 1 > 0.$

Somit sind $(1,2)$ und $(3,2)$ Sattelpunktstellen mit Wert $f(1,2) = 2 - \ln 2 = f(3,2)$;
Und $(2,1)$ ist (lokale) Minimalstelle mit Wert $f(2,1) = 1$.

*Zum Vergleich:* So sieht die Funktion im Bereich ihrer stationären Punkte aus