Klausur Mathematik 1

10. Febr. 2009, 08:30–10:30 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,*
davon 8 Aufgaben mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten
und 1 Aufgabe (Nr. 1) mit 10 erreichbaren Punkten.
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________

NAME ______________________

Vornamen ______________________

Geburtsdatum ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings schon sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y - 6x \leq -4$

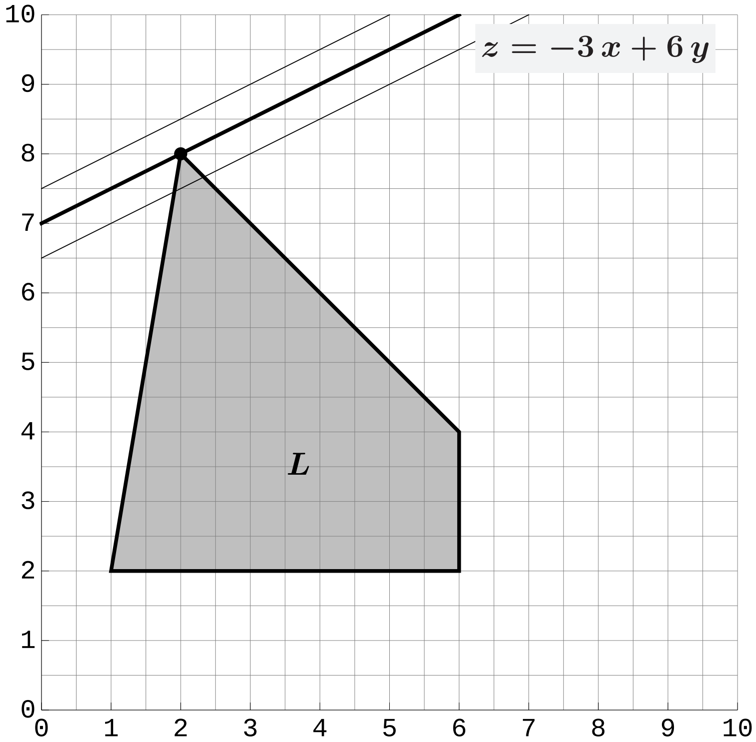
(2) $y + x \leq 10$

(3) $y \geq 2$

(4) $x \leq 6$

Ergebniskontrolle

$$L = \{(x, y) : \quad y \leq -4 + 6x \quad \text{und} \quad y \leq 10 - x \quad \text{und} \quad y \geq 2 \quad \text{und} \quad x \leq 6\}$$



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = -3x + 6y}$ „halbgraphisch“ : *Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Ergebniskontrolle

Zielgeradenschar in (x, y)-Koordinaten: $y = \frac{1}{6}\, z + \frac{1}{2}\, x$.
Der Koeffizient von z (bzw. der Koeffizient von y in der Zielfunktion) ist positiv, also bedeutet Maximierung von z eine parallele Verschiebung nach oben:

Maximalstelle: $x_0 = 2, \quad y_0 = 8$ und Maximalwert: $z_0 = 42$.

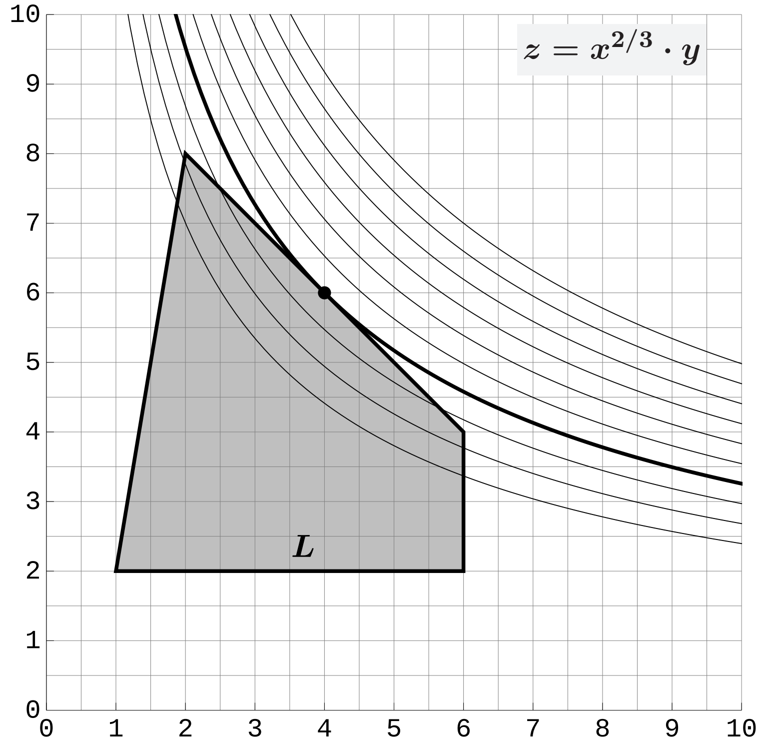
(x_0, y_0) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der (nach y aufgelösten) Beschränkungslinien

$$(1)\ y = -4 + 6x \quad \text{und} \quad (2)\ y = 10 - x$$

z.B. so: $-4 + 6x = y = 10 - x$, also $6x + x = 10 + 4$, d.h. $x_0 = 2$ und $y_0 \overset{(2)}{=} 10 - x_0 = 8$, und damit $z_0 = -3\,x_0 + 6\,y_0 = 42$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = x^{2/3} \cdot y}$ „halbgraphisch“ : *Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalen z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) *korrekt* in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

Ergebniskontrolle

Maximalstelle: $x_0 = 4$, $y_0 = 6$ und Maximalwert: $z_0 = 4^{2/3} \cdot 6$

(x_0, y_0) ergibt sich z.B. aus dem Einsetzen der (optisch erkannten) relevanten Beschränkungsgerade (2) $y = 10 - x$ in die Zielfunktion:

$z = f(x) = x^{2/3}(10 - x) = 10 \cdot x^{2/3} - x^{5/3}$ mit der Ableitung

$$f'(x) = \frac{20}{3}\, x^{-1/3} - \frac{5}{3}\, x^{2/3} \qquad (x > 0)$$

$f'(x) = 0$ liefert $\frac{20}{3} \cdot \frac{3}{5} = x^{2/3} \cdot x^{1/3}$, d.h. $x = 4$. Also ist die Maximalstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 4$ und $y_0 \overset{(2)}{=} 10 - x_0 = 6$ [offensichtlich $(4, 6) \in$ Lösungsmenge des LUGS] und damit $z_0 = x_0^{2/3} \cdot y_0 = 4^{2/3} \cdot 6$ [≈ 15.12].

[*Hinweis, auch im Hinblick auf Mathe 2:* Hier wird das allgemeine Ergebnis verwendet, dass bei diesem Typ Zielfunktion Nullsetzen der ersten Ableitung nur Kandidaten für Maxima liefern kann (niemals Minima).]

Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6 \cdot n^{1/4} - 5 \cdot n^{1/3}}{5 \cdot n^{1/4} - 6 \cdot n^{1/3}} = ?$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{8} \cdot \left(\dfrac{7}{8}\right)^k = ?$

(c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x^2 - 1) \cdot x^{-i} = ?$ (wobei $x > 1$ fix). *Untere Summengrenzen beachtet?*

Ergebniskontrolle

(a) $\dfrac{5}{6}$ **(b)** $\dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{7}{8} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{7}{8}} = \dfrac{7}{8}$

(c) Da $x > 1$, ist $0 < x^{-1} < 1$ und $q := x^{-1}$ erfüllt die Konvergenzbedingung $|q| < 1$, also $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x^2 - 1) \cdot x^{-i} = (x^2 - 1) \dfrac{x^{-1}}{1 - x^{-1}} = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ [Beachte: $x^{-i} = (\frac{1}{x})^i$]

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Eine endliche Folge von monatlichen Zahlungen a_i, $i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag d zunehmen, soll sich in n Monaten zu einem Wert von $s_n = 2600$ aufsummieren.

(1) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(2) $a_1 = 20$ und $n = 25$ werden festgelegt.
Welchen Wert muss d haben, damit das obige Summenziel $s_{25} = 2600$ mit der letzten Zahlung genau erreicht wird?
Und wie hoch ist dann die 12. Zahlung a_{12}? (Gefragt ist a_{12}, nicht a_{25}!)

Ergebniskontrolle

(1) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe]

(2) $a_1 = 20$, $n = 25$, $s_n = 2600 \;\Rightarrow\; 2600 = 25 \cdot 20 + \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot d \;\Rightarrow\; 2100 = 300 \cdot d \;\Rightarrow\; d = 7$ und $a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot d = 20 + 11 \cdot 7 = 97$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus. Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{1\times3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times1}$$

(a) $C \cdot B + A$

(b) Sortieren Sie mit einer Matrixmultiplikation die Spalten der Matrix B in die Reihenfolge 3./1./2. Spalte. Die „Sortiermatrix“ soll dabei nur aus Einheitsvektoren bestehen.

Ergebniskontrolle

(a) $C_{3\times1} \cdot B_{1\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$ und $(C \cdot B)_{3\times3} + A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times3}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{1\times3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{1\times3}$ [„Spaltenpicker“ 3./1./2.]

Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen M_{RZ} und M_{ZE} gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	3	4	-1
	R_2	1	1	2

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Zwischen-	Z_1	2	1
produkte	Z_2	4	2
	Z_3	2	3

Rohstoffpreise $r = (\,r_1 \quad r_2\,) = (\,3 \quad 4\,)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$ bzw.

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Rohstoffe	R_1	20	8
	R_2	10	9

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (\,3 \quad 4\,) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix} = 600.$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) zum Jahresende.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und zugehörige Zinsstaffel: 25%, 21%, 21%, −20%, wobei der letzte negative Wert z.B. von der Einberechnung besonderer Abzüge bei der Auszahlung herrührt.
Rendite $\mathfrak{i} = p\% = ?$ (vollständig ausrechnen!)

(b) Gegeben: $\mathfrak{i} = p\% = 3\%$, ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der den Anfangswert K_0 um 33% erhöhen soll.
Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[*Hilfswerte:* $\ln 0.03 \approx -3.51$, $\ln 0.33 \approx -1.1$, $\ln 1.03 \approx 0.03$, $\ln 1.33 \approx 0.29$, $\ln 3.3 \approx 1.19$]

Ergebniskontrolle

(a) $1 + \mathfrak{i} = (1.25 \cdot 1.21 \cdot 1.21 \cdot 0.8)^{1/4} = (1.21^2 \cdot 1)^{1/4} = (1.21)^{1/2} = 1.1$. Also $\mathfrak{i} = 0.1 = 10\%$

(b) $K_x = 1.33 \cdot K_0$;

$$K_x = K_0 \cdot (1 + \mathfrak{i})^x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\ln(K_x/K_0)}{\ln(1+\mathfrak{i})} = \frac{\ln 1.33}{\ln 1.03} \approx \frac{0.29}{0.03} = 9 + \frac{2}{3}; \text{ also } n = \lceil x \rceil = 10$$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{e^{2-x}}{1+e^{2-x}} \geq \dfrac{1}{2}$.

Ergebniskontrolle

$$\begin{aligned}
\tfrac{e^{2-x}}{1+e^{2-x}} \geq \tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2\cdot e^{2-x} &\geq 1+e^{2-x} && [\text{weil } 1+e^{2-x}>0 \text{ (sogar } >1)]\\
\Leftrightarrow\; e^{2-x} &\geq 1 &&\\
\Leftrightarrow\; 2-x &\geq 0 && [\text{weil } \ln 1 = 0 \text{ und } e^z \text{ und } \ln z \text{ strikt mon. wachsen}]\\
\Leftrightarrow\; x &\leq 2\,. && \text{Andere Ergebnisdarstellung z.B.: } \mathbb{L} = (-\infty, 2]
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Bestimmen Sie die Lösungsmengen der drei folgenden linearen Gleichungssysteme <u>simultan</u> mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Was haben Sie bzgl. der Koeffizientenmatrix A berechnet?
Geprüft wird, an einem einfachen Beispiel, die Beherrschung der <u>Methode</u> — eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$\begin{array}{rcrcrcl|c|c|c|}
 & & & & & & & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\
1\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & & 1 & 0 & 0 \\
-1\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & - & 1\cdot x_3 & = & & 0 & 1 & 0 \\
-2\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & - & 1\cdot x_3 & = & & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Ergebniskontrolle

	x_1	x_2	x_3	$= a$	b	c	*Protokollbsp.*
A	1	2	3	1	0	0	I
A	−1	−1	−1	0	1	0	II
A	−2	−1	−1	0	0	1	III
	1	2	3	1	0	0	$\mathbf{I}$
	0	1	2	1	1	0	$II + 1\cdot\mathbf{I}$
	0	3	5	2	0	1	$III + 2\cdot\mathbf{I}$
	1	0	−1	−1	−2	0	$I - 2\cdot\mathbf{II}$
	0	1	2	1	1	0	$\mathbf{II}$
	0	0	−1	−1	−3	1	$III - 3\cdot\mathbf{II}$
	1	0	0	0	1	−1	$I - 1\cdot\mathbf{III}$
	0	1	0	−1	−5	2	$II + 2\cdot\mathbf{III}$
	0	0	1	1	3	−1	$-1\cdot\mathbf{III}$

Rechts stehen die je eindeutigen Lösungen der obigen drei linearen Gleichungssysteme

$$A\cdot X = a \text{ mit } X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ A\cdot X = b \text{ mit } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix};\ A\cdot X = c \text{ mit } X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Als 3×3-Matrix ist dies die Inverse A^{-1} der Koeffizientenmatrix A.

Aufgabe 9 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$Y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem wenig eingeübten Aufgabenteil!

Ergebniskontrolle [Siehe Thema 5.2/Bsp. 7–8]

$Y \cdot A = B \Leftrightarrow A^T \cdot Y^T = B^T$.

$A^T \cdot X = B^T$ wird (simultan) mit dem GJ-Algorithmus gelöst. Die dabei erhaltene Lösung X wird transponiert, d.h. $Y = X^T$. Dieses Y löst die Matrixgleichung $Y \cdot A = B$.

	x_1	x_2	x_3 =	b_1	b_2	*Protokollbsp.*
A^T	1	−1	0	1	−1	I
	2	−1	−1	1	1	II
	1	−1	0	1	−1	**I**
	0	1	−1	−1	3	$II - 2 \cdot \mathbf{I}$
	1	0	−1	0	2	$I + 1 \cdot \mathbf{II}$
	0	1	−1	−1	3	**II**

[b_1, b_2 sind die Spalten von B^T = Zeilen von B]

Lösung X von $A^T \cdot X = B^T$ spaltenweise, d.h. Lösung $Y = X^T$ von $Y \cdot A = B$ zeilenweise:
$\mathbb{L}_1 = \{ x_1 = x_3,\ x_2 = -1 + x_3,\ x_3 \in \mathbb{R} \}$, $\mathbb{L}_2 = \{ x_1 = 2 + x_3,\ x_2 = 3 + x_3,\ x_3 \in \mathbb{R} \}$, wobei die x_3 in $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} a & -1 + a & a \\ 2 + b & 3 + b & b \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$