Mathematik für Ökonomen — WS 2008/09 — Campus Duisburg

U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 1

10. Febr. 2009, 13:30–15:30 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,*
davon 8 Aufgaben mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten
und 1 Aufgabe (Nr. 1) mit 10 erreichbaren Punkten.
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________

NAME ______________________

Vornamen ______________________

Geburtsdatum ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings schon sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y - 4x \le -7$

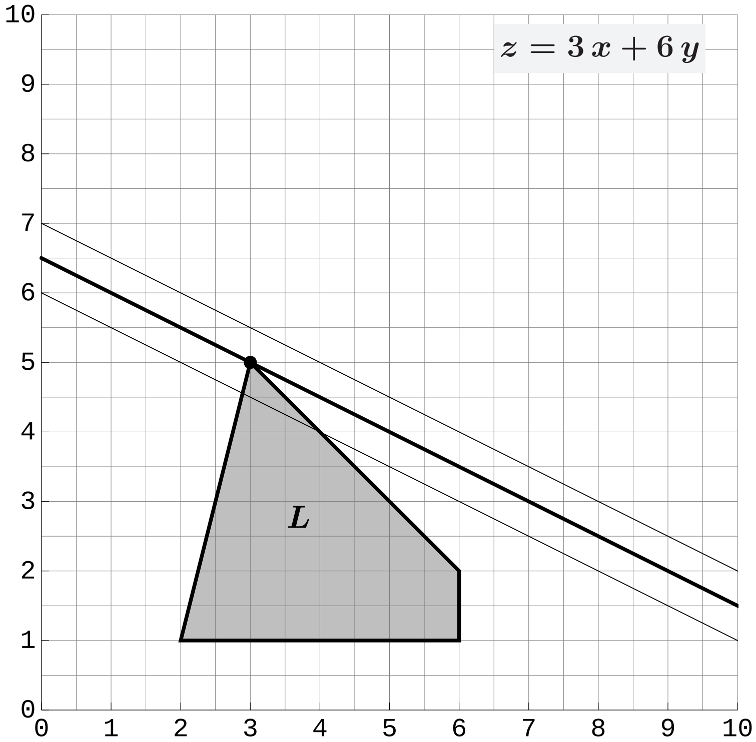
(2) $y + x \le 8$

(3) $y \ge 1$

(4) $x \le 6$

Ergebniskontrolle

$$L = \{(x, y) : \quad y \le -7 + 4x \quad \text{und} \quad y \le 8 - x \quad \text{und} \quad y \ge 1 \quad \text{und} \quad x \le 6\}$$



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = 3x + 6y}$ „halbgraphisch“ : *Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.*

Ergebniskontrolle

Zielgeradenschar in (x, y)-Koordinaten: $y = \frac{1}{6}\,z - \frac{1}{2}\,x$.
Der Koeffizient von z (bzw. der Koeffizient von y in der Zielfunktion) ist <u>positiv</u>, also bedeutet Maximierung von z eine parallele Verschiebung nach <u>oben</u>:

Maximalstelle: $x_0 = 3, \quad y_0 = 5$ und Maximalwert: $z_0 = 39$.

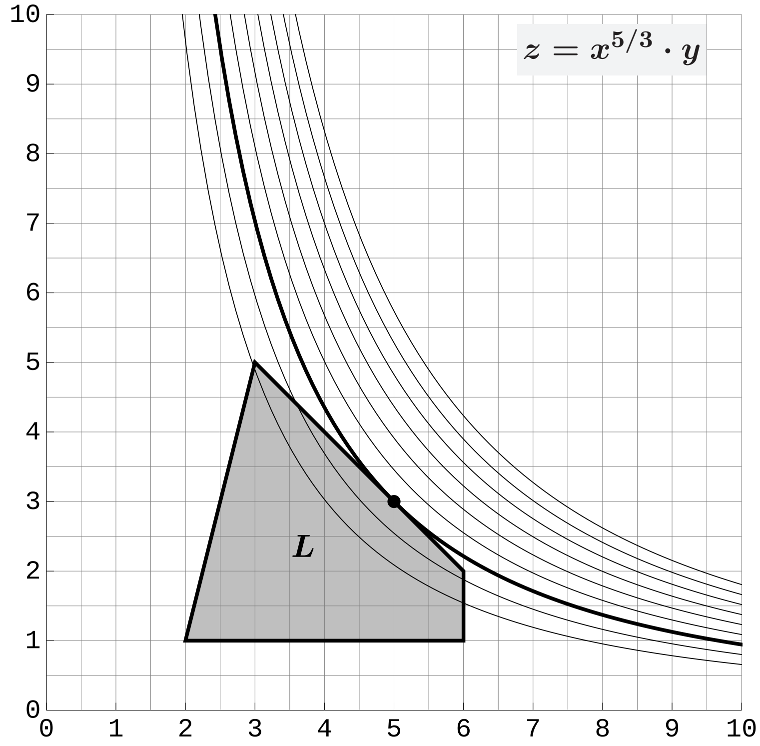
(x_0, y_0) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der (nach y aufgelösten) Beschränkungslinien

$$(1)\ y = -7 + 4x \quad \text{und} \quad (2)\ y = 8 - x$$

z.B. so: $-7 + 4x = y = 8 - x$, also $4x + x = 8 + 7$, d.h. $x_0 = 3$ und $y_0 \overset{(2)}{=} 8 - x_0 = 5$, und damit $z_0 = 3\,x_0 + 6\,y_0 = 39$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = x^{5/3} \cdot y}$ „halbgraphisch“ : *Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalen z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) *korrekt* in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

Ergebniskontrolle

Maximalstelle: $x_0 = 5$, $y_0 = 3$ und Maximalwert: $z_0 = 5^{5/3} \cdot 3$

(x_0, y_0) ergibt sich z.B. aus dem Einsetzen der (optisch erkannten) relevanten Beschränkungsgerade (2) $y = 8 - x$ in die Zielfunktion:

$z = f(x) = x^{5/3}(8 - x) = 8 \cdot x^{5/3} - x^{8/3}$ mit der Ableitung

$$f'(x) = \tfrac{40}{3}\, x^{2/3} - \tfrac{8}{3}\, x^{5/3} \qquad (x > 0)$$

$f'(x) = 0$ liefert $\frac{40}{3} \cdot \frac{3}{8} = x^{5/3} \cdot x^{-2/3}$, d.h. $x = 5$. Also ist die Maximalstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 5$ und $y_0 \overset{(2)}{=} 8 - x_0 = 3$ [offensichtlich $(5, 3) \in$ Lösungsmenge des LUGS] und damit $z_0 = x_0^{5/3} \cdot y_0 = 5^{5/3} \cdot 3$ [≈ 43.86].

[*Hinweis, auch im Hinblick auf Mathe 2:* Hier wird das allgemeine Ergebnis verwendet, dass bei diesem Typ Zielfunktion Nullsetzen der ersten Ableitung nur Kandidaten für Maxima liefern kann (niemals Minima).]

Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6\cdot n^{1/4} - 5\cdot n^{1/5}}{5\cdot n^{1/4} - 6\cdot n^{1/5}} = \,?$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{7}\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^k = \,?$

(c) $\sum\limits_{i=2}^{\infty}(1-x^2)\cdot(-x)^i = \,?$ (wobei $0 < x < 1$ fix). *Untere Summengrenzen beachtet?*

Ergebniskontrolle

(a) $\dfrac{6}{5}$ **(b)** $\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{8}{9}} = \dfrac{8}{7}$

(c) Da $0 < x < 1$ erfüllt $q := -x$ die Konvergenzbedingung $|q| < 1$,

also $\sum\limits_{i=2}^{\infty}(1-x^2)\cdot(-x)^i = (1-x^2)\dfrac{(-x)^2}{1-(-x)} = (1-x)\cdot x^2.$

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Eine endliche Folge von monatlichen Zahlungen a_i, $i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag d zunehmen, soll sich in n Monaten zu einem Wert von $s_n = 1050$ aufsummieren. Hierbei sind auch negative Zahlungen zugelassen.

(1) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(2) $d = 7$ und $n = 21$ werden festgelegt.
Welchen Wert muss a_1 haben, damit das obige Summenziel $s_{21} = 1050$ mit der letzten Zahlung genau erreicht wird?
Und wie hoch ist dann die 11. Zahlung a_{11}? (Gefragt ist a_{11}, nicht a_{21}!)

Ergebniskontrolle

(1) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe]

(2) $d = 7$, $n = 21$, $s_n = 1050 \;\Rightarrow\; 1050 = 21 \cdot a_1 + \frac{21 \cdot 20}{2} \cdot 7$
$\Leftrightarrow 1050 - 1470 = 21 \cdot a_1 \;\Rightarrow\; a_1 = -20$ und $a_{11} = a_1 + (11-1) \cdot 7 = -20 + 70 = 50.$

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus. Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

(a) $B \cdot C + A$

(b) Sortieren Sie mit einer Matrixmultiplikation die Zeilen der Matrix B in die Reihenfolge 2./3./1. Zeile. Die „Sortiermatrix“ soll dabei nur aus Einheitsvektoren bestehen.

Ergebniskontrolle

(a) $$B_{3\times 1} \cdot C_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad \text{und} \quad A_{3\times 3} + (B \cdot C)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$ [„Zeilenpicker“ 2./3./1.]

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen M_{RZ} und M_{ZE} gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	-1	3	4
	R_2	2	1	1

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Zwischen-	Z_1	3	1
produkte	Z_2	3	2
	Z_3	4	2

Rohstoffpreise $r = (\, r_1 \quad r_2 \,) = (\, 4 \quad 2 \,)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 22 & 13 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$ bzw.

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Rohstoffe	R_1	22	13
	R_2	13	6

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 127 \\ 70 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (\, 4 \quad 2 \,) \cdot \begin{pmatrix} 127 \\ 70 \end{pmatrix} = 648.$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) zum Jahresende.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und zugehörige Zinsstaffel: 25%, −19%, −19%, −20%, wobei die (negativen) Werte z.B. von einem Kursverfall herrühren.
Rendite $\mathfrak{i} = p\% = ?$ (vollständig ausrechnen!)

(b) Gegeben: $\mathfrak{i} = p\% = 2\%$, ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der den Anfangswert K_0 um 22% erhöhen soll.
Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[*Hilfswerte:* $\ln 0.02 \approx -3.9$, $\ln 0.22 \approx -1.51$, $\ln 1.02 \approx 0.019$, $\ln 1.22 \approx 0.199$, $\ln 2.2 \approx 0.79$]

Ergebniskontrolle

(a) $1+\mathfrak{i} = (1.25 \cdot 0.81 \cdot 0.81 \cdot 0.8)^{1/4} = (0.81^2)^{1/4} = (0.81)^{1/2} = 0.9$. Also $\mathfrak{i} = -0.1 = -10\%$

(b) $K_x = 1.22 \cdot K_0$;

$$K_x = K_0 \cdot (1+\mathfrak{i})^x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\ln(K_x/K_0)}{\ln(1+\mathfrak{i})} = \frac{\ln 1.22}{\ln 1.02} \approx \frac{0.199}{0.019} = 10 + \frac{9}{19};$$

also $n = \lceil x \rceil = 11$.

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge der Ungleichung $\quad \dfrac{2 \cdot e^{1-x} + 1}{2 + e^{1-x}} \leq 1.$

Ergebniskontrolle

$$\begin{aligned}
\tfrac{2 \cdot e^{1-x}+1}{2+e^{1-x}} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot e^{1-x} + 1 &\leq 2 + e^{1-x} \quad [\text{weil } 2 + e^{2-x} > 0 \text{ (sogar } > 2)] \\
\Leftrightarrow\; e^{1-x} &\leq 1 \\
\Leftrightarrow\; 1 - x &\leq 0 \qquad [\text{weil } \ln 1 = 0 \text{ und } e^z \text{ und } \ln z \text{ strikt mon. wachsen}] \\
\Leftrightarrow\; x &\geq 1\,. \qquad \text{Andere Ergebnisdarstellung z.B.: } \mathbb{L} = [1, \infty)
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Bestimmen Sie die Lösungsmengen der drei folgenden linearen Gleichungssysteme simultan mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Was haben Sie bzgl. der Koeffizientenmatrix A berechnet?
Geprüft wird, an einem einfachen Beispiel, die Beherrschung der Methode — eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$\begin{array}{rcrcrcl|c|c|c|}
 & & & & & & & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\
1\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & & 1 & 0 & 0 \\
-1\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & - & 1\cdot x_3 & = & & 0 & 1 & 0 \\
2\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & = & & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Ergebniskontrolle

	x_1	x_2	x_3	$= a$	b	c	*Protokollbsp.*
A	1	2	3	1	0	0	*I*
A	−1	−1	−1	0	1	0	*II*
A	2	1	1	0	0	1	*III*
	1	2	3	1	0	0	**I**
	0	1	2	1	1	0	$II + 1 \cdot \mathbf{I}$
	0	−3	−5	−2	0	1	$III - 2 \cdot \mathbf{I}$
	1	0	−1	−1	−2	0	$I - 2 \cdot \mathbf{II}$
	0	1	2	1	1	0	**II**
	0	0	1	1	3	1	$III + 3 \cdot \mathbf{II}$
	1	0	0	0	1	1	$I + 1 \cdot \mathbf{III}$
	0	1	0	−1	−5	−2	$II - 2 \cdot \mathbf{III}$
	0	0	1	1	3	1	**III**

Rechts stehen die je eindeutigen Lösungen der obigen drei linearen Gleichungssysteme

$$A \cdot X = a \text{ mit } X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; A \cdot X = b \text{ mit } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}; A \cdot X = c \text{ mit } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als 3×3-Matrix ist dies die Inverse A^{-1} der Koeffizientenmatrix A.

Aufgabe 9 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$Y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem wenig eingeübten Aufgabenteil!

Ergebniskontrolle [Siehe Thema 5.2/Bsp. 7–8]

$Y \cdot A = B \Leftrightarrow A^T \cdot Y^T = B^T$.

$A^T \cdot X = B^T$ wird (simultan) mit dem GJ-Algorithmus gelöst. Die dabei erhaltene Lösung X wird transponiert, d.h. $Y = X^T$. Dieses Y löst die Matrixgleichung $Y \cdot A = B$.

	x_1	x_2	x_3 =	b_1	b_2	*Protokollbsp.*
A^T	1	1	0	1	1	*I*
	−1	0	2	0	−1	*II*
	1	1	0	1	1	**I**
	0	1	2	1	0	*II* + 1 · **I**
	1	0	−2	0	1	*I* − 1 · **II**
	0	1	2	1	0	**II**

[b_1, b_2 sind die Spalten von B^T = Zeilen von B]

Lösung X von $A^T \cdot X = B^T$ spaltenweise, d.h. Lösung $Y = X^T$ von $Y \cdot A = B$ zeilenweise: $\mathbb{L}_1 = \{ x_1 = 2x_3,\ x_2 = 1 - 2x_3,\ x_3 \in \mathbb{R} \}$, $\mathbb{L}_2 = \{ x_1 = 1 + 2x_3,\ x_2 = -2x_3,\ x_3 \in \mathbb{R} \}$, wobei die x_3 in $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} 2a & 1-2a & a \\ 1+2b & -2b & b \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$