Klausur Mathematik 2

10. Febr. 2009, 16:00–18:00 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte* ***Hilfsmittel****: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie ***Handy*** *oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muss* ***geheftet*** *bleiben.*
- *Bei* ***Klausurunterbrechung*** *müssen die Klausur* <u>*und*</u> *ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher* ***keine vorzeitige Abgabe*** *möglich.*
- *Während der Klausur können* ***keine Fragen*** *zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

Die Klausur besteht aus ***10 Aufgaben*** *mit jeweils 4–7 erreichbaren Punkten.*
Insgesamt sind **50** ***Punkte*** *erreichbar.*
Ab erreichten **23** ***Punkten*** *ist die Klausur bestanden,* ***gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________________

NAME ______________________________

Vornamen ______________________________

Geburtsdatum ______________________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind <u>keine</u> Musterlösungen, sondern (allerdings schon sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden <u>ausführlich</u>, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α und β <u>rechnerisch</u> so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle" $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{\alpha}{x} - x^2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1/2 & \text{für } x = 1 \\ \dfrac{\beta}{1 + 3 \cdot x^{1/2}} & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle

LGW in $x_0 = 1$: $1 + \alpha$, Funktionswert in $x_0 = 1$ (FW): $1/2$, RGW in $x_0 = 1$: $\beta/4$.

f stetig in $x_0 = 1$ $\Leftrightarrow$ LGW=FW=RGW in x_0, d.h. $1 + \alpha = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} = \frac{\beta}{4}$,

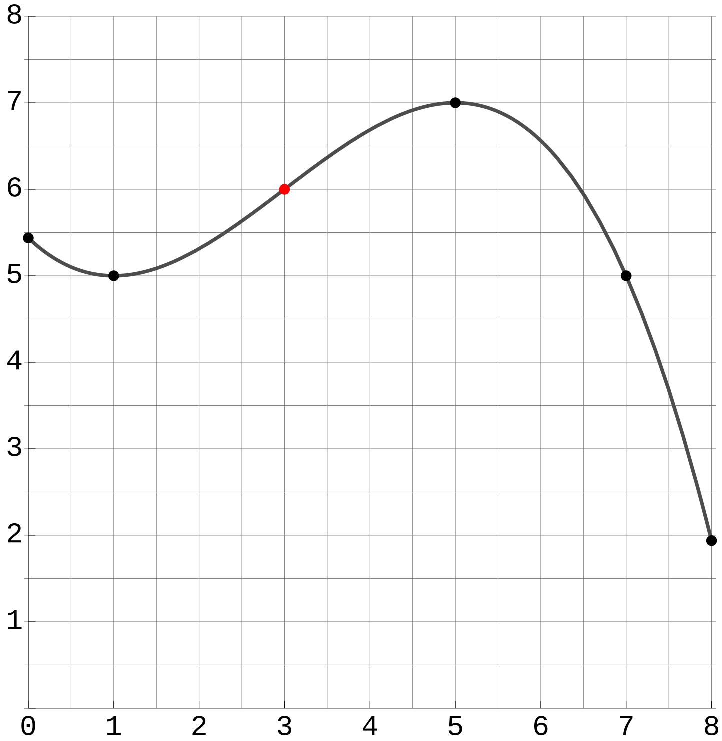
also f stetig in x_0 mit der Festlegung: $\alpha = -1/2$, $\beta = 2$.

[6] Gegeben $f(x) = 7 - \frac{1}{16}(x+1)(x-5)^2$ mit $D(f) = [0,\ 8]$. *Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!*

f hat die Ableitung $f'(x) = -\frac{3}{16} \cdot (x-1)(x-5)$, die lokale Minimalstelle $x = 1$ mit Wert $f(1) = 5$ und die lokale Maximalstelle $x = 5$ mit Wert $f(5) = 7$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(0) = \frac{87}{16} = 5.4375$, $f(1) = 5$, $f(5) = 7$, $f(7) = 5$, $f(8) = \frac{31}{16} = 1.9375$*]*



Ergebniskontrolle

$f''(x) = -\frac{3}{16}(x-5+x-1) = -\frac{3}{8}(x-3) = \frac{3}{8}(3-x)$.
Vorzeichen von $f''(x)$ = Vorzeichen von $(3-x)$ für alle $x \in D(f) = [0,8]$:

Also $f''(x) \geq 0$ für alle $x \leq 3$, d.h. f konvex über $[0,3]$,
und $f''(x) \leq 0$ für alle $x \geq 3$, d.h. f konkav über $[3,8]$.
Wendepunkt an der Stelle $x = 3$ mit Wert $f(3) = 7 - \frac{1}{16} \cdot 4 \cdot 2^2 = 6$.

(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = 3$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(3)$ bei einer relativen Erhöhung von $x_0 = 3$ um 8%.

Ergebniskontrolle

$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \dfrac{-\frac{3}{16} \cdot (x-1)(x-5)}{7 - \frac{1}{16}(x+1)(x-5)^2}$. Für $x_0 = 3$ ist $\dfrac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(3) \cdot 8\%$.

Mit $f(3) = 7 - \frac{1}{16} \cdot 4 \cdot 2^2 = 6$ [siehe auch (a)] und $f'(3) = -\frac{3}{16} \cdot 2 \cdot (-2) = \frac{3}{4}$ ist $\mathcal{E}^f(3) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, also $\dfrac{df}{f} \approx \frac{3}{8} \cdot 8\% = 3\%$ [oder als % von 1: $df/f \approx \frac{3}{8} \cdot 0.08 = 0.03$]

[*Zum Vergleich:* Unsere Näherung: $f(3) \cdot 1.03 = 6.18$, „exakt“: $f(3.24) = 6.17914$]

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3-x+(x-2)\cdot\ln(x-2)}{5-x-2\cdot(4-x)^{1/2}}$

Ergebniskontrolle

Zweimal LHR $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x+(x-2)\cdot\ln(x-2)}{5-x-2\cdot(4-x)^{1/2}}$

$$\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{-1+1\cdot\ln(x-2)+(x-2)\cdot(x-2)^{-1}}^{=\ln(x-2)}}{-1+1\cdot(4-x)^{-1/2}} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)^{-1}}{\frac{1}{2}(4-x)^{-3/2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Aufgabe 4 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Zur Berechnung von $(1.25)^{1/5} \approx 1.04564$ ist die folgende Bestimmungsgleichung für x zu lösen:

$$x^5 \stackrel{!}{=} 1.25$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: *Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 1$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).*

Ergebniskontrolle

$f(x) = x^5 - 1.25 \stackrel{!}{=} 0$, $f'(x) = 5\,x^4$; $x_{n+1} = x_n - (\, f(x_n)/f'(x_n)\,)$; Startwert $x_0 = 1$;

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (\, f(x_0)/f'(x_0) = 1 - (\, f(1)/f'(1)\,) = 1 - (\,-0.25/5\,) = 1.05$;
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.05 - \dfrac{f(1.05)}{f'(1.05)} = 1.05 - \dfrac{1.05^5 - 1.25}{5 \cdot 1.05^4}$ [≈ 1.04568].

[Anwendungsbeispiel mit Bezug zur Zinsrechnung (Mathe 1): x = Effektiver Zinsfaktor für eine Kapitalerhöhung um 25% nach 5 Jahren, Rendite = $x - 1 \approx 4.564\%$]

Aufgabe 5

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_1^5 f(t)\,dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} e^{1-t} & \text{für } 1 \leq t \leq 4 \\ t^{-2} & \text{für } 4 < t \leq 5 \end{cases}$

Hilfswert: $e^{-3} \approx 1/20$

Ergebniskontrolle

$$\begin{aligned} \int_1^5 f(t)\,dt &= \int_1^4 e^{1-t}\,dt + \int_4^5 t^{-2}\,dt = [-e^{1-t}]_1^4 + [-t^{-1}]_4^5 \\ &= \underbrace{\left(-e^{-3} + e^0\right)}_{\approx -1/20\,+\,1} + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4}\right)}_{=1/20} \approx 1 \quad [\textit{Zum Vergleich „genau“: } 1.00021] \end{aligned}$$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Für $15 \le x \le 55$ sei $F(x) := F(15) + \int_{15}^{x} (\frac{200}{25+t} - 1)\, dt$, wobei $F(15)$ fix vorgegeben ist.

(a) Berechnen Sie den Wert $F(55)$. *[Hilfswert:* $\ln 2 \approx 0.69$*]*

(b) Skizzieren Sie *grob* das durch das Integral $\int_{15}^{55} (\frac{200}{25+t} - 1)\, dt$ berechnete Flächenstück (z.B. anhand der „Hilfspunkte" an den Stellen $t = 0$, $t = 15$, $t = 25$, $t = 55$, $t = 75$)

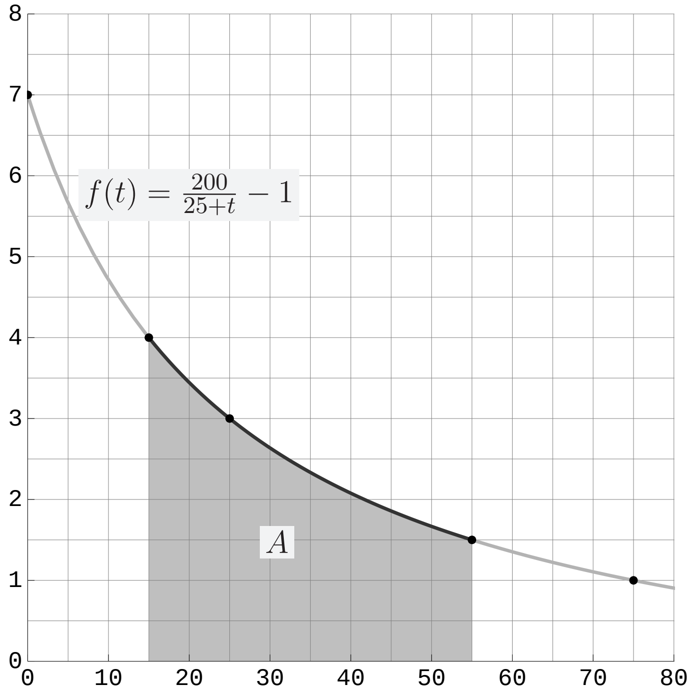
Ergebniskontrolle

(a) $F(55) = F(15) + \int_{15}^{55} (\frac{200}{25+t} - 1)\, dt$, wobei

$$A = \int_{15}^{55} (\tfrac{200}{25+t} - 1)\, dt = [200 \cdot \ln(25+t) - t]_{15}^{55}$$
$$= (200\ln(80) - 55) - (200\ln(40) - 15) = -40 + 200\,\underbrace{(\ln 80 - \ln 40)}_{=\ln(80/40)=\ln 2} \approx -40 + 138 = 98.$$

[Zum Vergleich genauer: $A \approx 98.6294$*]*

(b) Skizze Typ „$1/x$" z.B. mit der „Wertetabelle" $f(0) = 7$, $f(15) = 4$, $f(25) = 3$, $f(55) = 1.5$, $f(75) = 1$ für den Integranden $f(t) := \frac{200}{25+t} - 1$.



Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad $n = 2$) der Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und damit eine Näherung für den Wert $f(0.07) = 0.07/1.07$.

Ergebniskontrolle [Evtl. umformen: $f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$]

$f(0) = 0$; $f'(x) = (1+x)^{-2}$, $f'(0) = 1$; $f''(x) = -2(1+x)^{-3}$, $f''(0) = -2$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = 0 + x - x^2$ [mit $x_0 = 0$].

$f(0.07) \approx T_2^f(0.07; 0) = 0.07 - 0.07^2 = 0.0651$ [*zum Vergleich genauer:* 0.06542056]

[*Bemerkung: f ist der „Aufschlaganteil“ der Prozentrechnung (siehe Unterlagen Nr. 13)*]

Aufgabe 8

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen

[5] Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = (x+y) \cdot e^{y-1} + x \cdot \ln(x) - x \quad (x, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle

$f'_x(x,y) = e^{y-1} + \ln(x);$

$f'_y(x,y) = e^{y-1} + (x+y) \cdot e^{y-1} = (1+x+y) \cdot e^{y-1};$

$f''_{xx}(x,y) = x^{-1};$

$f''_{yy}(x,y) = e^{y-1} + (1+x+y) \cdot e^{y-1} = (2+x+y) \cdot e^{y-1};$

$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = e^{y-1}.$

Aufgabe 9 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[7] Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 4 + x^{2/3} \cdot y^{1/3} \quad (x > 0,\ y > 0)$
und die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 8$ und $y_0 = 27$.

[*Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem weniger geübten Aufgaben*<u>*teil*</u>]

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor zwischen relativen Änderungen der Variable x und relativen Änderungen der Variable y, die das Niveau $z = f(x_0, y_0)$ der Funktion f an der obigen Basisstelle (bei linearer Approximation) konstant belassen.

Ergebniskontrolle

(a) $f_x'(x,y) = \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} \cdot y^{1/3}; \quad f_x'(8,27) = \frac{2}{3} \cdot 8^{-1/3} \cdot 27^{1/3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 1$
$f_y'(x,y) = x^{2/3} \cdot \frac{1}{3} \cdot y^{-2/3}; \quad f_y'(8,27) = 8^{2/3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 27^{-2/3} = 2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{4}{27}$
$f(8,27) = 4 + 8^{2/3} \cdot 27^{1/3} = 4 + 2^2 \cdot 3 = 16,$
also $\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = x_0 \cdot f_x'(x_0,y_0)/f(x_0,y_0) = 8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$
und $\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = y_0 \cdot f_y'(x_0,y_0)/f(x_0,y_0) = 27 \cdot \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$.

(b) Lineare Approximation von (df/f):
$(df/f)(x_0,y_0) \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0}$.
$z = f(x_0,y_0)$ konstant bedeutet $(df/f)(x_0,y_0) = 0$.

$0 = \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0}$ wird aufgelöst zu $\dfrac{dx/x_0}{dy/y_0} = -\dfrac{\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0)}{\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0)}$.

Hier also (an der Basisstelle): $\dfrac{dx/8}{dy/27} \underset{(a)}{=} -\dfrac{\mathcal{E}_y^f(8,27)}{\mathcal{E}_x^f(8,27)} = -\dfrac{1/4}{1/2} = -\dfrac{1}{2}$.

[Oder entspr. Auflösung zum Kehrwert: $\dfrac{dy/27}{dx/8} \underset{(a)}{=} -\dfrac{\mathcal{E}_x^f(8,27)}{\mathcal{E}_y^f(8,27)} = -\dfrac{1/2}{1/4} = -2$]

Gleichwertiger Ansatz: Für das konstante Niveau $f(x_0,y_0)$ ist die Substitutionsrate
$\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{f_x'(x_0,y_0)}$, also $\dfrac{dx/x_0}{dy/y_0} = -\dfrac{y_0 \cdot f_y'(x_0,y_0)}{x_0 \cdot f_x'(x_0,y_0)} \underset{(a)}{=} -\dfrac{27 \cdot \frac{4}{27}}{8 \cdot 1} = -\dfrac{1}{2}$.

Aufgabe 10 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[7] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 200 + 6 \cdot x \cdot y - x^3 - 3 \cdot y^2 \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> *und* die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle

$f'_x(x,y) = 6 \cdot y - 3 \cdot x^2, \quad f'_y(x,y) = 6 \cdot x - 6 \cdot y;$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x &=& 0 \\ f'_y &=& 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 6y - 3x^2 &=& 0 \\ 6x - 6y &=& 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 6x - 3x^2 &=& 0 \\ x &=& y \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3x(2-x) &=& 0 \\ x &=& y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \ \ \underline{\text{oder}} \ \ x = 2 \\ x \ = \ y \end{array} \right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (2,2)$.

$f''_{xx}(x,y) = -6 \cdot x, \qquad f''_{yy}(x,y) = -6, \qquad f''_{xy}(x,y) = 6 = f''_{yx}(x,y).$

[Hier die Variante, erst $H_D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ an der Stelle (x_0, y_0) allgemein auszurechnen und dann die stationären Punkte (x_0, y_0) einzusetzen:]

$H_D(x_0,y_0) = (f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2)(x_0,y_0) = (-6 \cdot x_0)(-6) - 6^2 = 36 \cdot (x_0 - 1)$
H_D-Werte an den stationären Stellen:
$H_D(0,0) = 36 \cdot (0-1) = -36, \quad H_D(2,2) = 36 \cdot (2-1) = 36$

Insgesamt ist also:

- $H_D(0,0) < 0$, also $(0,0)$ Sattelpunktstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(0,0) = 200$.
- $H_D(2,2) > 0$ und $f''_{xx}(2,2) = -6 \cdot 2 < 0$, also $(2,2)$ eine lokale Maximalstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(2,2) = 200 + 6 \cdot 2 \cdot 2 - 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 200 + 24 - 8 - 12 = 204$.

Zum Vergleich: So sieht die Funktion im Bereich ihrer stationären Punkte aus.