Mathematik für Ökonomen — WS 2009/10 — Campus Duisburg

U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 1

09. Febr. 2010, 13:30–15:30 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,*
davon 8 Aufgaben mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten
und 1 Aufgabe (Nr. 1) mit 10 erreichbaren Punkten.
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ____________________

NAME ____________________

Vornamen ____________________

Geburtsdatum ____________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings schon sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y - x \leq 3$

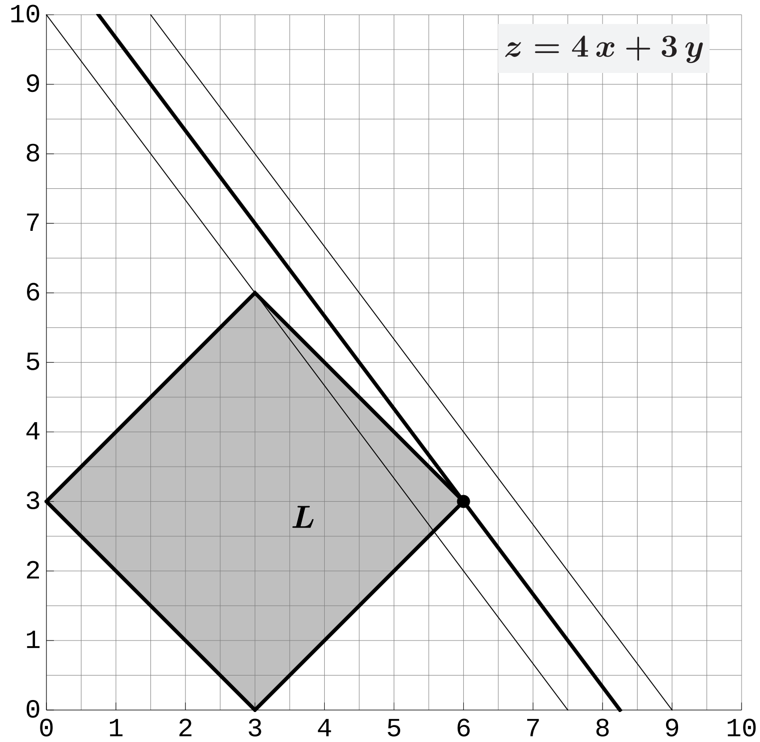
(2) $y + x \leq 9$

(3) $y - x \geq -3$

(4) $y + x \geq 3$

Ergebniskontrolle

$$L = \{(x,y): \quad y \leq 3+x \quad \text{und} \quad y \leq 9-x \quad \text{und} \quad y \geq -3+x \quad \text{und} \quad y \geq 3-x\}$$



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = 4x + 3y}$ „halbgraphisch" : *Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Ergebniskontrolle

Zielgeradenschar in (x,y)-Koordinaten: $y = \frac{1}{3}\,z - \frac{4}{3}\,x$.
Der Koeffizient von z (bzw. der Koeffizient von y in der Zielfunktion) ist positiv, also bedeutet Maximierung von z eine parallele Verschiebung nach oben:

Maximalstelle: $x_0 = 6, \quad y_0 = 3$ und Maximalwert: $z_0 = 33$.

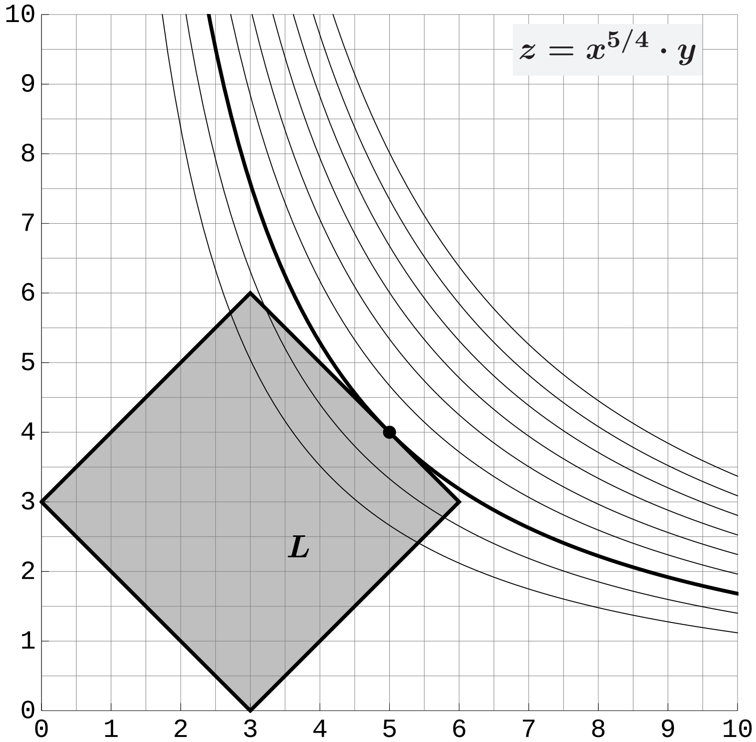
(x_0, y_0) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der (nach y aufgelösten) Beschränkungslinien

$$(2)\ y = 9 - x \quad \text{und} \quad (3)\ y = -3 + x$$

z.B. so: $9 - x = y = -3 + x$, also $12 = 2x$, d.h. $x_0 = 6$ und $y_0 \overset{(2)}{=} 9 - x_0 = 3$,
und damit $z_0 = 4\,x_0 + 3\,y_0 = 33$.

[3] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = x^{5/4} \cdot y}$ „halbgraphisch“ : *Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalen* z*-Wert hervorheben, Maximalstelle* (x_0, y_0) *markieren, Maximalstelle* (x_0, y_0) *und Maximalwert* z_0 *rechnerisch bestimmen.*

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) *korrekt* in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

Ergebniskontrolle

Maximalstelle: $x_0 = 5$, $y_0 = 4$ und Maximalwert: $z_0 = 5^{5/4} \cdot 4$

(x_0, y_0) ergibt sich z.B. aus dem Einsetzen der (optisch erkannten) relevanten Beschränkungsgerade (2) $y = 9 - x$ in die Zielfunktion:

$z = f(x) = x^{5/4}(9 - x) = 9 \cdot x^{5/4} - x^{9/4}$ mit der Ableitung

$$f'(x) = \tfrac{45}{4}\, x^{1/4} - \tfrac{9}{4}\, x^{5/4} \qquad (x > 0)$$

$f'(x) = 0$ liefert $\frac{45}{4} \cdot \frac{4}{9} = x^{5/4} \cdot x^{-1/4}$, d.h. $x = 5$. Also ist die Maximalstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 5$ und $y_0 \overset{(2)}{=} 9 - x_0 = 4$ [offensichtlich $(5, 4) \in$ Lösungsmenge des LUGS] und damit $z_0 = x_0^{5/4} \cdot y_0 = 5^{5/4} \cdot 4$ [≈ 29.91].

[*Hinweis, auch im Hinblick auf Mathe 2:* Hier wird das allgemeine Ergebnis verwendet, dass bei diesem Typ Zielfunktion Nullsetzen der ersten Ableitung nur Kandidaten für Maxima liefern kann (niemals Minima).]

Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 \cdot n^{1/3} - 4 \cdot n^{1/4}}{4 \cdot n^{1/3} - 5 \cdot n^{1/4}} = ?$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} 11 \cdot \left(\dfrac{10}{11}\right)^k = ?$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^i = ?$ (wobei $0 < x$ fix). *Untere Summengrenzen beachtet?*

Ergebniskontrolle

(a) $\dfrac{5}{4}$

(b) $11 \cdot \left(\dfrac{10}{11}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{10}{11}} = 10^2 = 100$

(c) Da $0 < x$ ist $0 < \frac{x}{1+x} < 1$, also erfüllt $q := \frac{x}{1+x}$ die Konvergenzbedingung $|q| < 1$.

Somit ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^i = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - \frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+x-x} = x.$

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Eine endliche Folge von monatlichen Zahlungen a_i, $i = 1, \dots, n$, die um den konstanten Geldbetrag d zunehmen, soll sich in n Monaten zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $a_1 = 10$ und $n = 13$ werden festgelegt. Welchen Wert muss d haben, damit das Summenziel $s_{13} = 1300$ mit der letzten Zahlung a_{13} genau erreicht wird?
Und wie hoch ist dann die 7. Zahlung a_7? (Gefragt ist a_7, nicht a_{13}!)

Ergebniskontrolle

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe]

(b) $a_1 = 10, n = 13, s_{13} = 1300 \Rightarrow 1300 = 13 \cdot 10 + \frac{13 \cdot 12}{2} \cdot d \Rightarrow 100 = 10 + 6 \cdot d \Rightarrow d = 15$.
Damit ist $a_7 = 10 + (7-1) \cdot d = 10 + 90 = 100$.

Aufgabe 4 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus. Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{1\times 4}$$

(a) $(A + A^T) \cdot B$

(b) Sortieren Sie mit einer Matrixmultiplikation die Spalten der Matrix C in die Reihenfolge 4./2./1./3. Spalte. Die „Sortiermatrix“ soll dabei nur aus Einheitsvektoren bestehen.

Ergebniskontrolle

(a) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(A + A^T)_{3\times 3} \cdot B_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{1\times 4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}_{1\times 4}$ [„Spaltenpicker“]

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen M_{RZ} und M_{ZE} gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	5	3	2
	R_2	2	4	1

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Zwischen-produkte	Z_1	2	1
	Z_2	2	5
	Z_3	0	2

Rohstoffpreise $r = (\,r_1 \quad r_2\,) = (\,2 \quad 1\,)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$ bzw.

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Rohstoffe	R_1	16	24
	R_2	12	24

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 280 \\ 240 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (\,2 \quad 1\,) \cdot \begin{pmatrix} 280 \\ 240 \end{pmatrix} = 800.$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Ein Betrag soll — ohne Startkapital — jährlich vorschüssig über 8 gleiche Raten der Höhe $A > 0$ angespart werden um dann ab dem folgenden Jahr durch eine vorschüssige jährliche Rente der Höhe R in 4 Jahren aufgebraucht zu werden. Kalkulationszins $\mathtt{i} = p\%$.

(a) Gefragt: Das Verhältnis von R zu A in Abhängigkeit von q, wobei $q = 1 + \mathtt{i}$, d.h. gefragt ist eine Gleichung $R/A =?$, wobei rechts vom Gleichheitszeichen als Variable nur q auftritt (bitte hierbei möglichst gut zusammenfassen/auskürzen).

(b) Welchen Wert hat der Ausdruck R/A, wenn nun konkret $i = 0.088 = 8.8\%$? *[Hilfswerte* $1.088^4 \approx 1.40$, $1.088^8 \approx 1.96$, $1.088^{12} \approx 2.75$*]*

Sie dürfen, aber müssen nicht, die folgenden Formeln verwenden: $[q = 1 + \mathtt{i},\ v = 1/q]$

(F1) Endwert bei jährlicher Ratenzahlung A (Einzahlung) über m Zinsperioden ($m \in \mathbb{N}$)

$E_m = K_0 \cdot q^m + A \cdot q^s \cdot \frac{q^m-1}{q-1}$, vorschüssig: $s = 1$, nachschüssig: $s = 0$

(F2) Barwert einer jährlichen Rente R über m Zinsperioden ($m \in \mathbb{N}$)

$B_m = R \cdot v^s \cdot \frac{1-v^m}{1-v} = \frac{R}{q^s \cdot q^{m-1}} \cdot \frac{q^m-1}{q-1}$, vorschüssig: $s = 0$, nachschüssig: $s = 1$

Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem weniger eingeübten Aufgabenteil!

Ergebniskontrolle

(a) Ein möglicher Rechenweg ist der Ansatz: $E_8 = B_4$.

$[E_8 =]\quad A \cdot q^1 \cdot \frac{q^8-1}{q-1} = R \cdot \frac{1}{q^0 \cdot q^{4-1}} \cdot \frac{q^4-1}{q-1} \quad [= B_4]$.

Also $R/A = q^4 \cdot \frac{q^8-1}{q^4-1} = q^4(q^4+1) = q^8 + q^4$.

(b) Mit den gegebenen Hilfswerten ($q = 1.088$) ist nach (a):

$$R/A \approx 1.40 + 1.96 = 3.36 \quad [\textit{bzw. } R/A \approx 1.4 \cdot (1 + 1.4) = 3.36].$$

[4] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{2}{1+e^{1-|x|}} \leq 1.$$

Ergebniskontrolle $L = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$, denn

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{1+e^{1-|x|}} \leq 1 \Leftrightarrow \quad 2 &\leq 1 + e^{1-|x|} && \text{[weil } 1 + e^z > 0 \text{ für jedes } z \in \mathbb{R}\text{]} \\
\Leftrightarrow \quad 1 &\leq e^{1-|x|} && \\
\Leftrightarrow \ln 1 &\leq 1 - |x| && \text{[weil } e^z \text{ und } \ln z \text{ strikt monoton wachsen]} \\
\Leftrightarrow \quad |x| &\leq 1 && \text{[weil } \ln 1 = 0\text{]} \\
\Leftrightarrow \quad -1 &\leq x \leq 1. && \textit{Andere Ergebnisdarstellung: } L = [-1,\, 1]
\end{aligned}$$

[6] Bestimmen Sie die Lösungsmengen der beiden folgenden linearen Gleichungssysteme simultan mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).

[Geprüft wird, an einem einfachen Beispiel, die Beherrschung der Methode — eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.]

$$\begin{array}{rcrcrcc|c|c|}
 & & & & & & & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\
1\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & = & & 2 & -1 \\
2\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & - & 1\cdot x_3 & = & & 5 & 5 \\
0\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & - & 1\cdot x_3 & = & & 1 & 7
\end{array}$$

Ergebniskontrolle

x_1	x_2	x_3 =	a	b	*Protokollbsp.*
1	−1	0	2	−1	*I*
2	−1	−1	5	5	*II*
0	1	−1	1	7	*III*
1	−1	0	2	−1	**I**
0	1	−1	1	7	$II - 2\cdot\mathbf{I}$
0	1	−1	1	7	*III*
1	0	−1	3	6	$I + 1\cdot\mathbf{II}$
0	1	−1	1	7	**II**
0	0	0	0	0	$III - 1\cdot\mathbf{II}$

$$\mathbb{L}_a = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 + x_3 \\ x_2 & = & 1 + x_3 \\ \multicolumn{3}{l}{x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar}} \end{array} \right\}, \quad \mathbb{L}_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{rcl} x_1 & = & 6 + x_3 \\ x_2 & = & 7 + x_3 \\ \multicolumn{3}{l}{x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar}} \end{array} \right\}$$

Aufgabe 9 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei X unbekannt ist:

$$X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{B}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus die Inverse von A und dann die Lösung für X.

Ergebniskontrolle

	x_1	x_2	x_3 =	a	b	c	*Protokollbsp.*
A	1	3	1	1	0	0	I
	2	5	1	0	1	0	II
	-2	-5	-2	0	0	1	III
	1	3	1	1	0	0	$\mathbf{I}$
	0	-1	-1	-2	1	0	$II - 2 \cdot \mathbf{I}$
	0	1	0	2	0	1	$III + 2 \cdot \mathbf{I}$
	1	0	-2	-5	3	0	$I + 3 \cdot \mathbf{II}$
	0	1	1	2	-1	0	$(-1) \cdot \mathbf{II}$
	0	0	-1	0	1	1	$III + 1 \cdot \mathbf{II}$
	1	0	0	-5	1	-2	$I - 2 \cdot \mathbf{III}$
	0	1	0	2	0	1	$II + 1 \cdot \mathbf{III}$
	0	0	1	0	-1	-1	$(-1) \cdot \mathbf{III}$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ und damit $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.