Mathematik für Ökonomen — WS 2009/10 — Campus Duisburg

U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 2

09. Febr. 2010, 16:00–18:00 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muss **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,*
davon 9 Aufgaben mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten
und 1 Aufgabe (Nr. 10) mit 9 erreichbaren Punkten.
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________

NAME ______________________

Vornamen ______________________

Geburtsdatum ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings schon sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α und β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 2$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \sqrt{2x} & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 8 & \text{für } x = 2 \\ (\beta + x)^3 & \text{für } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle

LGW in $x_0 = 2$: 2α, Funktionswert in $x_0 = 2$ (FW): 8, RGW in $x_0 = 2$: $(\beta+2)^3$.

f stetig in $x_0 = 2 \Leftrightarrow$ LGW=FW=RGW in x_0, d.h. $2\alpha = 8$ und $8 = (\beta+2)^3$,

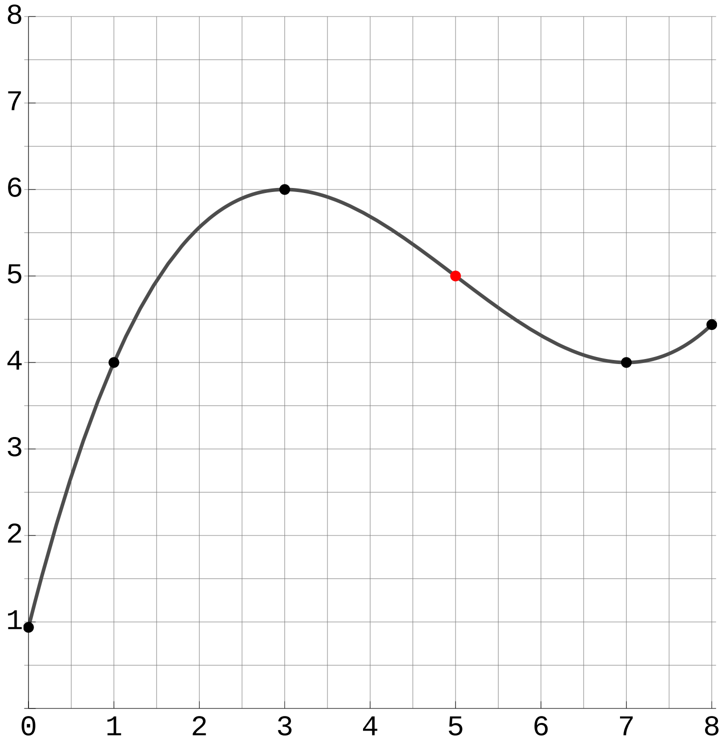
also f stetig in x_0 mit der Festlegung: $\alpha = 4$, $\beta = 0$.

[6] Gegeben $f(x) = 6 + \frac{1}{16}(x-9)(x-3)^2$ mit $D(f) = [0,\ 8]$. *Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!*

f hat die Ableitung $f'(x) = \frac{3}{16} \cdot (x-3)(x-7)$, die lokale Maximalstelle $x = 3$ mit Wert $f(3) = 6$ und die lokale Minimalstelle $x = 7$ mit Wert $f(7) = 4$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(0) = \frac{15}{16} = 0.9375$, $f(1) = 4$, $f(3) = 6$, $f(7) = 4$, $f(8) = \frac{71}{16} = 4.4375$*]*



Ergebniskontrolle

$f''(x) = \frac{3}{16}(x-7+x-3) = \frac{3}{16}(2x-10) = \frac{3}{8}(x-5)$.
Vorzeichen von $f''(x)$ = Vorzeichen von $(x-5)$ für alle $x \in D(f) = [0, 8]$:

Also $f''(x) \leq 0$ für alle $x \leq 5$, d.h. f konkav über $[0, 5]$,
und $f''(x) \geq 0$ für alle $x \geq 5$, d.h. f konvex über $[5, 8]$.
Wendepunkt an der Stelle $x = 5$ mit Wert $f(5) = 6 + \frac{1}{16} \cdot (-4) \cdot 2^2 = 5$.

(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = 5$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(5)$ bei einer relativen Erhöhung von x gegenüber $x_0 = 5$ um 4%.

Ergebniskontrolle

$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \dfrac{\frac{3}{16} \cdot (x-3)(x-7)}{6 + \frac{1}{16}(x-9)(x-3)^2}$. Für $x_0 = 5$ ist $\dfrac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(5) \cdot 4\%$.
Mit $f(5) = 6 + \frac{1}{16} \cdot (-4) \cdot 2^2 = 5$ [siehe auch (a)] und $f'(5) = \frac{3}{16} \cdot 2 \cdot (-2) = -\frac{3}{4}$ ist $\mathcal{E}^f(5) = -\frac{3}{4}$, also $\dfrac{df}{f} \approx -\frac{3}{4} \cdot 4\% = -3\%$ [oder als % von 1: $\dfrac{df}{f} \approx -\frac{3}{4} \cdot 0.04 = -0.03$]
[*Zum Vergleich:* Unsere Näherung: $f(5) \cdot 0.97 = 4.85$, „exakt“: $f(5.2) = 4.8505$]

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{2(x-1)} - 2x + 1}{(x-1)^2}$

Ergebniskontrolle

Zweimal LHR $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{e^{2(x-1)} - 2x + 1}{(x-1)^2}$

$$\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1} \frac{2 \cdot e^{2(x-1)} - 2}{2(x-1)} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1} \frac{4 \cdot e^{2(x-1)}}{2} = 2.$$

[4] Zur Berechnung von $(1.2)^{1/4} \approx 1.04664$ ist die folgende Bestimmungsgleichung für x zu lösen:

$$x^4 \stackrel{!}{=} 1.2$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: *Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert* $x_0 = 1$, *eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).*

Ergebniskontrolle

$f(x) = x^4 - 1.2 \stackrel{!}{=} 0$, $f'(x) = 4\,x^3$; $x_{n+1} = x_n - (\,f(x_n)/f'(x_n)\,)$; Startwert $x_0 = 1$;

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (\,f(x_0)/f'(x_0) = 1 - (\,f(1)/f'(1)\,) = 1 - (\,-0.2/4\,) = 1.05$;
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.05 - \dfrac{f(1.05)}{f'(1.05)} = 1.05 - \dfrac{1.05^4 - 1.2}{4 \cdot 1.05^3}$ $[\approx 1.04665]$.

[Anwendungsbeispiel mit Bezug zur Zinsrechnung (Mathe 1): $x \approx 1.04664$ *ist effektiver Zinsfaktor für eine Kapitalerhöhung um 20% nach 4 Jahren. Rendite* $= x - 1 \approx 4.664\%$ *]*

Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_1^9 f(t)\,dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 3 \cdot t^{1/2} & \text{für } 1 \leq t \leq 4 \\ 3 \cdot t^{-1/2} & \text{für } 4 < t \leq 9 \end{cases}$

Ergebniskontrolle

$$\begin{aligned} \int_1^9 f(t)\,dt &= \int_1^4 3 \cdot t^{1/2}\,dt + \int_4^9 3 \cdot t^{-1/2}\,dt = [\,2 \cdot t^{3/2}\,]_1^4 + [\,6 \cdot t^{1/2}\,]_4^9 \\ &= 2 \cdot (4^{3/2} - 1^{3/2}) + 6 \cdot (9^{1/2} - 4^{1/2}) = 2 \cdot (8-1) + 6 \cdot (3-2) = 20. \end{aligned}$$

[5] Für $25 \le x \le 80$ sei $F(x) := F(25) + \int_{25}^{x} (\frac{200}{105-t} - 1)\ dt$, wobei $F(25)$ fix vorgegeben ist.

(a) Berechnen Sie den Wert $F(65)$. *[Hilfswert:* $\ln 2 \approx 0.69$*]*

(b) Skizzieren Sie das durch das Integral $\int_{25}^{65} (\frac{200}{105-t} - 1)\, dt$ berechnete Flächenstück.

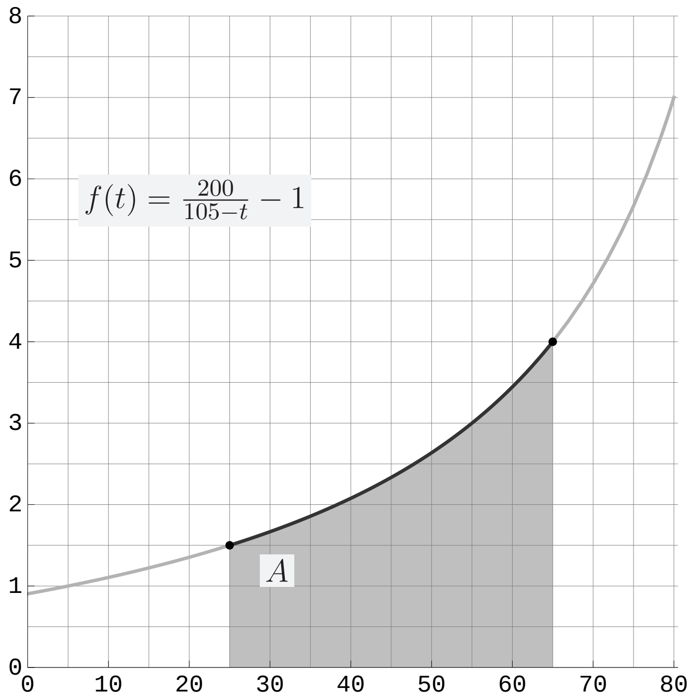
Ergebniskontrolle

(a) $F(65) = F(25) + \int_{25}^{65} (\frac{200}{105-t} - 1)\ dt$, wobei

$$A = \int_{25}^{65} (\tfrac{200}{105-t} - 1)\ dt = [-200 \cdot \ln(105-t) - t]_{25}^{65}$$
$$= (-200\ln(40) - 65) - (-200\ln(80) - 25)$$
$$= -40 + 200\,\underbrace{(\ln 80 - \ln 40)}_{=\ln(80/40)=\ln 2} = -40 + 200 \cdot 0.69 \approx -40 + 138 = 98.$$

[Zum Vergleich genauer: $A \approx 98.6294$*]*

(b) Die Fläche zwischen dem Intervall $[25, 65]$ auf der t-Achse und dem zugehörigen Stück der Kurve $f(t) = \frac{200}{105-t} - 1$.



Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad $n = 2$) der Funktion $f(x) = (1 + x)^{-5}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und damit eine Näherung für den Wert $f(0.01) = 1.01^{-5}$.

Ergebniskontrolle

$f(0) = 1;\quad f'(x) = (-5)(1 + x)^{-6},\quad f'(0) = -5;\quad f''(x) = 30(1 + x)^{-7},\quad f''(0) = 30;$

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = 1 - 5x + 15x^2$ [mit $x_0 = 0$].

Damit ist $f(0.01) \approx T_2^f(0.01; 0) = 1 - 5 \cdot 0.01 + 15 \cdot 0.01^2 = 0.9515.$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = x \cdot y \; + \; \ln(y + x^3)$ $\qquad (x > 0,\ y > 0)$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle

$$f'_x(x,y) = y + \frac{3x^2}{y + x^3};$$

$$f'_y(x,y) = x + \frac{1}{y + x^3};$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{6x(y + x^3) - 3x^2(3x^2)}{(y + x^3)^2} = \frac{3x(2y - x^3)}{(y + x^3)^2};$$

$$f''_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(y + x^3)^2};$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 1 - \frac{3x^2}{(y + x^3)^2}.$$

[5] Gegeben sind die Funktion $f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{2 \cdot x - y}$
und die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um $+6\%$ und die y-Variable um $+8\%$ verändert.

Ergebniskontrolle

(a) $f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{2x-y}$;
$f'_x(x,y) = y(e^{2x-y} + x \cdot e^{2x-y} \cdot 2) = y \cdot e^{2x-y}(1+2x)$;
$f'_y(x,y) = x(e^{2x-y} + y \cdot e^{2x-y} \cdot (-1)) = x \cdot e^{2x-y}(1-y)$;
$\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = x_0 \cdot f'_x(x_0,y_0)/f(x_0,y_0) = 1 + 2x_0$; $\qquad \mathcal{E}_x^f(1,2) = 1+2 = 3$;
$\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = y_0 \cdot f'_y(x_0,y_0)/f(x_0,y_0) = 1 - y_0$; $\qquad \mathcal{E}_y^f(1,2) = 1-2 = -1$.

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 3 \cdot (6\%) + (-1) \cdot (8\%) = 10\%$.
[d.h. die relative Veränderung von $f(1,2) = 2$ zu $f(1.06, 2.16)$ ist ca. $+10\%$,
zum Vergleich „exakt“: $f(1.06,\ 2.16) = 2.19982$].

Aufgabe 10 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 9 - 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 - x^4 + 4 \cdot x \cdot y - 2 \cdot y^2 \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen *und* die zugehörigen Funktionswerte)

[*Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem weniger geübten Aufgabenteil*]

Ergebniskontrolle

$f'_x(x,y) = -12 \cdot x + 12 \cdot x^2 - 4 \cdot x^3 + 4 \cdot y \ = \ 4(-3 \cdot x + 3 \cdot x^2 - x^3 + y)$
$f'_y(x,y) \ = \ 4 \cdot x - 4 \cdot y = 4(x-y);$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\begin{Bmatrix} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -3 \cdot x + 3 \cdot x^2 - x^3 + y = 0 \\ x - y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2 \cdot x + 3 \cdot x^2 - x^3 = 0 \\ x = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x(-2+3x-x^2) = 0 \\ x = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \ \underline{\text{oder}} \ x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \ \underline{\text{oder}} \ x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x = y \end{Bmatrix}$$

Also sind die stationären Punkte: $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (1,1)$ und $P_3 = (2,2)$.

$f''_{xx}(x,y) = 4(-3 + 6 \cdot x - 3 \cdot x^2) = -12(1 - 2x + x^2) = -12(x-1)^2, \qquad f''_{yy}(x,y) = -4,$
$f''_{yx}(x,y) = 4 = f''_{xy}(x,y).$

[Hier die Variante, erst $H_D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ an der Stelle (x_0, y_0) allgemein auszurechnen und dann die stationären Punkte (x_0, y_0) einzusetzen:]

$H_D(x_0,y_0) = (f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2)(x_0,y_0) = 48(x_0-1)^2 - 16$
H_D-Werte an den stationären Stellen:
$H_D(0,0) = 48 \cdot 1^2 - 16 = 32, \quad H_D(1,1) = 48 \cdot 0^2 - 16 = -16, \quad H_D(2,2) = 48 \cdot 1^2 - 16 = 32$

Insgesamt ist also:

- $H_D(0,0) > 0$ und $f''_{xx}(0,0) = -12 < 0$, also $(0,0)$ eine lokale Maximalstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(0,0) = 9$.
- $H_D(1,1) < 0$, also $(1,1)$ Sattelpunktstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(1,1) = 9 - 6 + 4 - 1 + 4 - 2 = 8$.
- $H_D(2,2) > 0$ und $f''_{xx}(2,2) = -12 < 0$, also $(2,2)$ eine lokale Maximalstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(2,2) = 9 - 6 \cdot 4 + 4 \cdot 8 - 16 + 4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 9$.

Zum Vergleich: So sieht die Funktion im Bereich ihrer stationären Punkte aus.