Mathematik für Ökonomen – WS 10/11 – Campus Duisburg
Prof. Dr. U. Herkenrath, Fakultät Mathematik

Klausur Mathematik 1

8. Feb. 2011, 13:30-15:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Matrikelnummer ____________________

Name ____________________

Vorname ____________________

Geburtsdatum ____________________

Ich habe obige Punkte gelesen.
Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer - als „Nach-der-Klausur-Service“.

Einige Aufgaben lassen sich auf verschiedenen Wegen lösen und sofern keine besondere Methode verlangt wurde, ist jeder nachvollziehbare Rechenweg auch in Ordnung.

[4] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y + \frac{1}{4}x \leq 5$

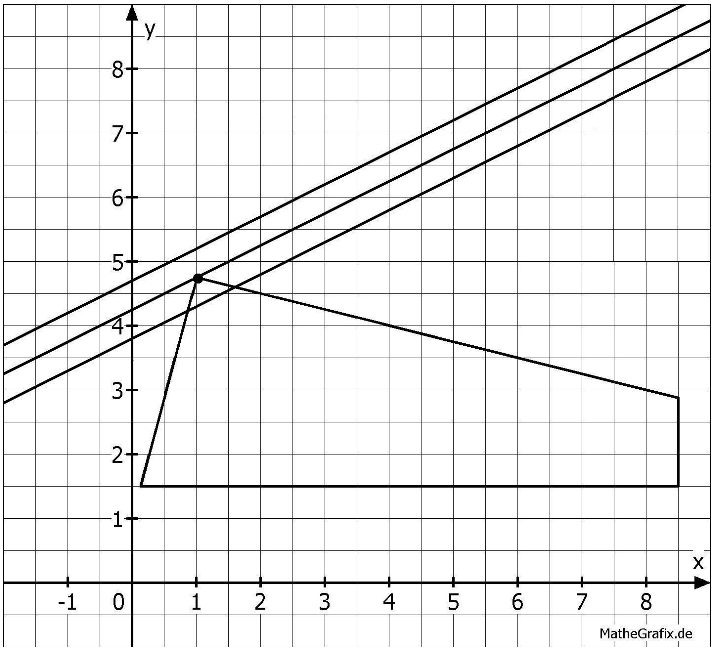
(2) $y - \frac{15}{4}x \leq 1$

(3) $x \leq \frac{17}{2}$

(4) $y \geq \frac{3}{2}$

Ergebniskontrolle:

$$L = \{(x,y) : y \leq 5 - \frac{1}{4}x \text{ und } y \leq 1 + \frac{15}{4}x \text{ und } x \leq \frac{17}{2} \text{ und } y \geq \frac{3}{2}\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

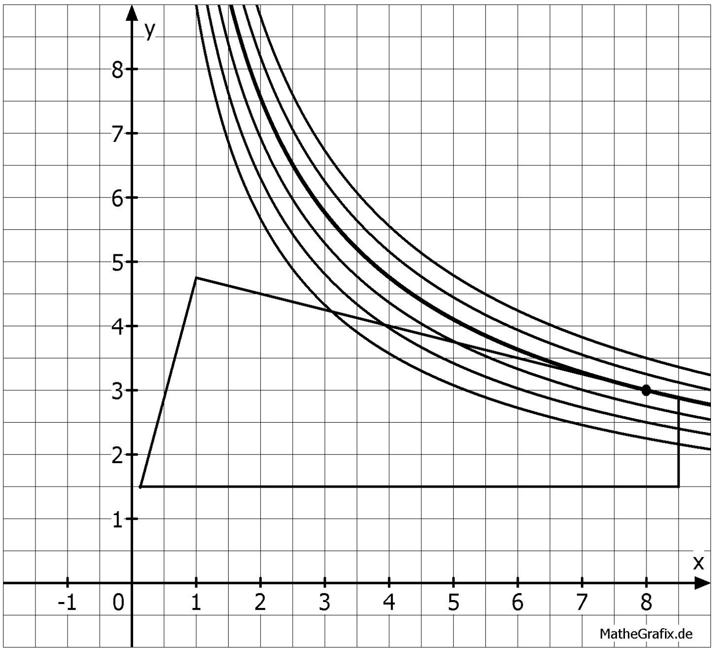
[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = -2x + 4y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Ergebniskontrolle:

Zielgeradenschar: $y = \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}x$.
Da $b > 0$ in $z = ax + by$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach oben.
Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (1) $y = 5 - \frac{1}{4}x$ und (2) $y = 1 + \frac{15}{4}x$. Gleichsetzen von (1) und (2) liefert $5 - \frac{1}{4}x = 1 + \frac{15}{4}x$ und damit $x_0 = 1$. Eingesetzt in (1) oder (2) erhält man $y_0 = \frac{19}{4} = 4.75$ (z.B. $y_0 \overset{(1)}{=} 5 - \frac{1}{4} \cdot 1$). Die Maximalstelle $(x_0 = 1, y_0 = \frac{19}{4})$ eingesetzt in die Ziekfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = -2 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{19}{4} = 17$.

[3] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{2}{3}}y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle:

Maximalstelle $(x_0 = 8, y_0 = 3)$ und Maximalwert $z_0 = 12$.
Optisch ergibt sich (1) als relevante Beschränkungsgerade. Eingesetzen von (1) $y = 5 - \frac{1}{4}x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{\frac{2}{3}}(5 - \frac{1}{4}x) = 5x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}x^{\frac{5}{3}}$. Die erste Ableitung $f'(x) = 5 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ gleich 0 setzten, liefert $x_0 = 8$. Einsetzen von x_0 in die Beschränkungsgerade, liefert $y_0 = 5 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 3$. Die Maximalstelle $(x_0 = 8, y_0 = 3)$ ist offenbar $\in$ L und damit ergibt sich der Maximalwert durch einsetzen in die Zielfunktion: $z_0 = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 3 = 12$.

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{17\cdot n^5 \;-\; 3\cdot n^4}{15\cdot n^4 \;-\; 3\cdot n^5} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{3^i}{4^{i+1}} = ?$

(c) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} [((\frac{1}{3})^i)^2 + ((\frac{1}{2})^i)^3] = ?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

$(a) = -\frac{17}{3}$

$(b) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{3^{i+2}}{4^{i+3}} = \frac{3^2}{4^3} \sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^i = \frac{3^2}{4^3} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16} \qquad (|\frac{3}{4}| < 1)$

$(c) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} ((\frac{1}{3})^2)^i + \sum\limits_{i=0}^{\infty} ((\frac{1}{2})^3)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} + \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{9}{8} + \frac{8}{7} = \frac{127}{56} \qquad (|\frac{1}{9}|, |\frac{1}{8}| < 1)$

[4] Eine endliche Folge von monatlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Monaten zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 10$ und $|d| = 2$ (d.h. $d =$ -2) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 120$ mit der letzten Zahlung a_{10} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{10}?

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe]

(b) $120 = 10 \cdot a_1 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot (-2) \Rightarrow 210 = 10 \cdot a_1 \Rightarrow 21 = a_1$

$a_{10} = 21 + 9 \cdot (-2) = 3$

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei ist E die 3×3-Einheitsmatrix und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

(a) $(A^T + E) \cdot B$

(b) $A \cdot C$

Ergebniskontrolle:

(a) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $A^T + E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(A^T + E) \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

(b) nicht definiert!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	0	1	2
	Z_2	2	1	1

		Zwischenprod.	
		Z_1	Z_2
Rohstoffe	R_1	1	2
	R_2	2	1
	R_3	3	2

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2, r_3) = (1, 2, 3)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 55 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (1, 2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 55 \end{pmatrix} = 264$

[4] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der um 67% über dem Anfangswert liegen soll.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ (d.h. $K_x = K_3$). Erforderliche Rendite $i = p\% =?$

(b) Gegeben: $i = 7\%$. Erfoderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

Hilfswerte: $(1.067)^{\frac{1}{3}} \approx 1.022$, $(1.67)^{\frac{1}{3}} \approx 1.186$, $(0.67)^{\frac{1}{3}} \approx 0.875$, $\ln 1.067 \approx 0.065$, $\ln 1.67 \approx 0.513$, $\ln 1.7 \approx 0.530$, $\ln 1.07 \approx 0.068$

Ergebniskontrolle:

$K_x = 1.67 \cdot K_0$

(a) $1.67 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1.186 \approx (1.67)^{\frac{1}{3}} = 1 + i \Leftrightarrow 18.6\% = 0.186 \approx i$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.07)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(K_x/K_0)}{\ln(1.07)} = \frac{\ln(1.67)}{\ln(1.07)} \approx \frac{0.513}{0.068} = 8 - \frac{31}{68}$; $n = \lceil x \rceil = 8$

[5] Bestimmen Sie (simultan) die x-Lösungsmenge von:

$$e^{x-1} > 1 \quad \text{und} \quad \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2+\ln(x^2)} \geq 1$$

Ergebniskontrolle:

$e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
(weil die Exponentialfunktion strikt monoton wächst bzw. durch Anwendung des Logarithmus)

Wegen $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow (2 + \ln(x^2)) > 0$ (sogar > 2) und damit

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \cdot (2 + \ln(x^2)) \geq 3 \geq 2 + \ln(x^2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2)) \geq 3 \text{ und } 3 \geq 2 + \ln(x^2) \\
&\Leftrightarrow \quad 3 + 3\ln(x) \geq 3 \text{ und } 1 \geq 2 \cdot \ln(x) \\
&\Leftrightarrow \quad 3 \cdot \ln(x) \geq 0 \text{ und } 1 \geq 2 \cdot \ln(x) \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(x) \geq 0 \text{ und } \frac{1}{2} \geq \ln(x) \\
&\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \text{ und } e^{1/2} \geq x
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich die x-Lösungsmenge als $\{x \in \mathbb{R} : x > 1 \text{ und } 1 \leq x \leq \sqrt{e}\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq \sqrt{e}\}$

[5] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Probe gemacht?

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
1	1	2	1	0	0	I
1	2	3	0	1	0	II
1	3	5	0	0	1	III
1	1	2	1	0	0	I
0	1	1	-1	1	0	II - I
0	2	3	-1	0	1	III - I
1	1	2	1	0	0	I
0	1	1	-1	1	0	II
0	0	1	1	-2	1	III - 2 II
1	1	0	-1	4	-2	I - 2 III
0	1	0	-2	3	-1	II - III
0	0	1	1	-2	1	III
1	0	0	1	1	-1	I - II
0	1	0	-2	3	-1	II
0	0	1	1	-2	1	III

Probe: $B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = E_{3\times3}$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

[4] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines simultan durchgeführten Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmengen L_b und L_c der zugehörigen linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = c$.

$$\begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & c \\ \hline 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* & c^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

[4] (b) Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei X unbekannt ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(b1) Welche Dimension muss X haben, damit die Gleichung definiert ist?

(b2) Bestimmen Sie X.

Ergebniskontrolle:

(a) $Ax = c$ ist nicht lösbar, da $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \neq 1$, $L_c = \emptyset$

Beim LGS $Ax = b$ ist eine Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & = & -4 & - & x_3 \\ x_2 & = & 2 & & \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

(b1) 2×3 (2 Zeilen und 3 Spalten)

(b2) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$