Mathematik für Ökonomen – WS 10/11 – Campus Duisburg

Prof. Dr. U. Herkenrath, Fakultät Mathematik

Klausur Mathematik 2

8. Feb. 2011, 16:00-18:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Matrikelnummer ____________________

Name ____________________

Vorname ____________________

Geburtsdatum ____________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer - als „Nach-der-Klausur-Service“.

Einige Aufgaben lassen sich auf verschiedenen Wegen lösen und sofern keine besondere Methode verlangt wurde, ist jeder nachvollziehbare Rechenweg auch in Ordnung.

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α und β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 3$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \frac{x^2}{2+x} & \text{für } \; 0 \leq x < 3 \\ \frac{3}{5} & \text{für } \; x = 3 \\ \frac{1}{5} \cdot (\beta + e^{3-x}) & \text{für } \; 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle

LGW in $x_0 = 3 : \alpha\frac{9}{5}$, Funktionswert in $x_0 = 3$ (FW): $\frac{3}{5}$, RGW in $x_0 = 3$: $\frac{1}{5}(\beta + 1)$.

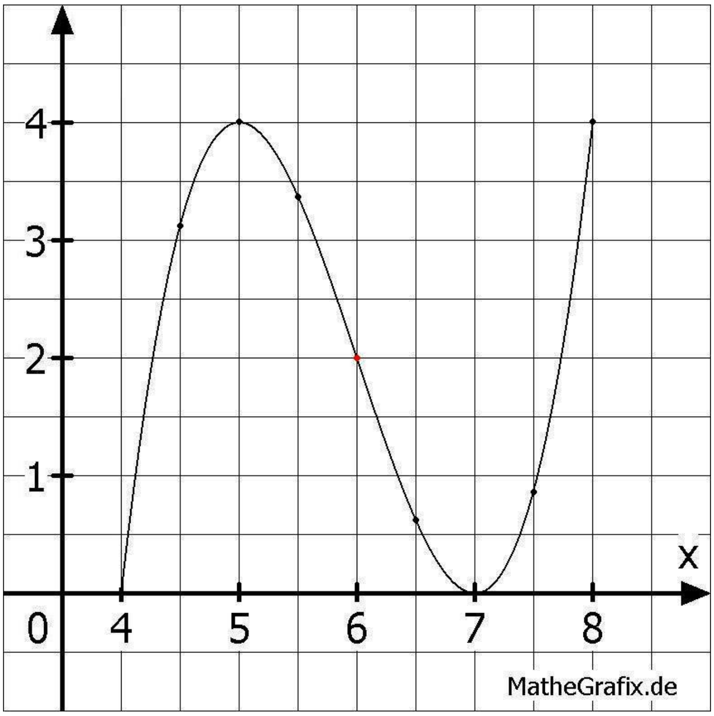
f ist stetig in $x_0 = 3 \Leftrightarrow$ LGW = FW = RGW in x_0, d.h. $\alpha\frac{9}{5} = \frac{3}{5}$ und $\frac{3}{5} = \frac{1}{5}(\beta + 1)$

Also f stetig in x_0 mit der Festlegung: $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 2$.

[6] Gegeben $f(x) = 4 + (x-8)\cdot(x-5)^2$ mit $D(f) = [4,8]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = (3x-21)\cdot(x-5)$, die lokale Maximalstelle $x = 5$ mit dem Wert $f(5) = 4$ und die lokale Minimalstelle $x = 7$ mit dem Wert $f(7) = 0$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(4) = 0$, $f(4.5) = 3.125$, $f(5) = 4$, $f(5.5) = 3.375$, $f(6.5) = 0.625$, $f(7) = 0$, $f(7.5) = 0.875$, $f(8) = 4$]



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle
$f''(x) = 3\cdot(x-5) + (3x-21) = 6x - 36$.
Also $f''(x) \leq 0$ für $x \in [4,6]$, d.h. f konkav über $[4,6]$,
und $f''(x) \geq 0$ für $x \in [6,8]$, d.h. f konvex über $[6,8]$.
Wendepunkt an der Stelle $x = 6$ mit dem Wert $f(6) = 4 + (-2)\cdot 1^2 = 2$.

(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = 6$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(6)$ bei einer relativen Erhöhung von x gegenüber $x_0 = 6$ um 2%.

Ergebniskontrolle
$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{(3x-21)\cdot(x-5)}{4+(x-8)\cdot(x-5)^2}$. Für $x_0 = 6$ ist $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(6)\cdot 2\%$.
Mit $f(6) = 2$ [siehe auch (a)] und $f'(6) = (18-21)\cdot(6-5) = -3$ ist $\mathcal{E}^f(6) = -9$, also $\frac{df}{f} \approx -9 \cdot 2\% = -18\%$ [oder als % von 1: $\frac{df}{f} \approx -9 \cdot 0.02 = -0.18$]

[Zum Vergleich: Unsere Näherung: $f(6)\cdot 0.82 = 1.64$, „exakt“: $f(6.12) = 1.641728$]

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x\cdot\ln x+2\cdot(x-3)^2}{e^x}$ mit der L'Hopital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x\cdot\ln x+2\cdot(x-3)^2}{e^x} \overset{\text{LHR}\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot x^2+1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+4\cdot(x-3)}{e^x} \overset{\text{LHR}\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6\cdot x+\frac{1}{x}+4}{e^x} \overset{\text{LHR}\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6-x^{-2}}{e^x} = 0$$

[4] Folgende Bestimmungsgleichung ist für x zu lösen:

$$x^5 + x^2 \overset{!}{=} 4.1$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 1$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).

Ergebniskontrolle

$f(x) = x^5 + x^2 - 4.1 \overset{!}{=} 0; \quad x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n));$ Startwert $x_0 = 1;$

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0)) = 1 - (f(1)/f'(1)) = 1 - (-2.1/7) = 1.3$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3 - \frac{f(1.3)}{f'(1.3)} = [1.3 - \frac{(1.3)^5+1.69-4.1}{14.2805+2.6} \approx 1.22281449]$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{27} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 2 \cdot t & \text{für } \ 0 \leq t < 8 \\ e^{t/2} & \text{für } \ t = 8 \\ 2 \cdot t^{-1/3} & \text{für } \ 8 < t \leq 27 \end{cases}$

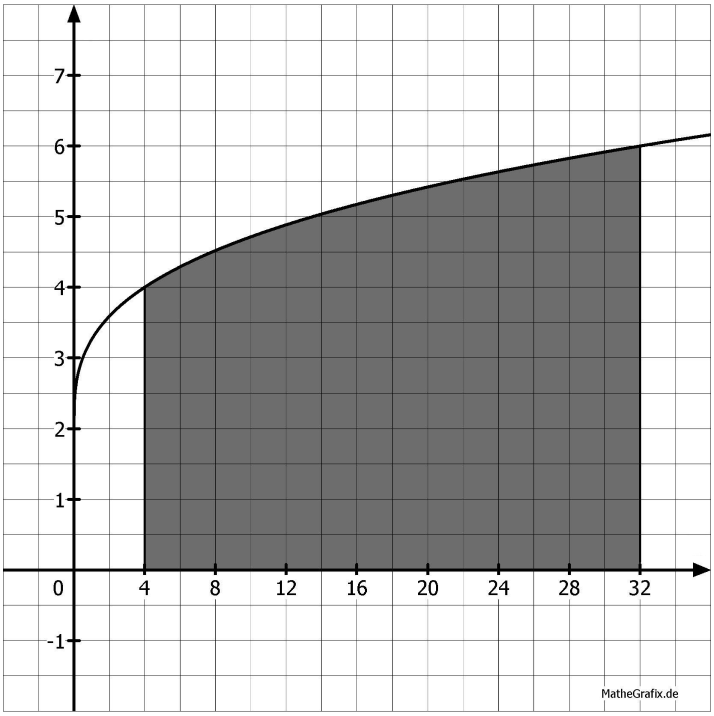
<u>Ergebniskontrolle</u>

$\int_0^{27} f(t)dt = \int_0^8 2 \cdot t\ dt + \int_8^{27} 2 \cdot t^{-1/3} dt = [t^2]_0^8 + [3 \cdot t^{2/3}]_8^{27} = 64 - 0 + 3 \cdot 9 - 3 \cdot 4 = 79$

[4] Für $4 \leq x \leq 36$ sei $F(x) := F(4) + \int_4^x 2 + (2t)^{1/3}\ dt$, wobei $F(4)$ fix vorgegeben ist.

(a) Berechnen Sie den Wert $F(32)$.

(b) Skizzieren Sie das durch das Integral $\int_4^{32} 2 + (2t)^{1/3}\ dt$ berechnete Flächenstück.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle

(a) $F(32) = F(4) + \int_4^{32} 2 + (2t)^{1/3}\ dt$, wobei

$$\int_4^{32} 2 + (2t)^{1/3}\ dt = [2 \cdot t + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(2t)^{4/3}]_4^{32} = 160 - 14 = 146$$

(b) s.o.

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = 1 + e^{-x^2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und damit eine Näherung für den Wert $f(0.01) = 1 + e^{-0.0001}$.

Ergebniskontrolle

$f(0) = 2$; $f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $f'(0) = 0$; $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$; $f''(0) = -2$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = 2 + (-1) \cdot (x - 0)^2$ mit $[x_0 = 0]$.

Damit ist $f(0.01) \approx T_2^f(0.01, 0) = 2 - 0.0001 = 1.9999$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = (x + y^2) \cdot \ln(x)$ $(x > 0, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle

$f'_x(x, y) = 1 \cdot \ln(x) + (x + y^2) \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + (x + y^2) \cdot x^{-1}$

$f'_y(x, y) = 2y \cdot \ln(x)$

$f''_{xx}(x, y) = \frac{1}{x} + 1 \cdot x^{-1} + (x + y^2) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{2}{x} - (x + y^2) \cdot x^{-2}$

$f''_{yy}(x, y) = 2 \cdot \ln(x)$

$f''_{xy}(x, y) = 2y \cdot \frac{1}{x}$

$f''_{yx}(x, y) = 2y \cdot \frac{1}{x}$

[5] Gegeben sind die Funktion $f(x,y) = x^2 \cdot y^2 + e^{y-2x}$
und die Basistelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um $+2\%$ und die y-Variable um $+1\%$ verändert.

Ergebniskontrolle

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$
mit $f'_x(x,y) = 2xy^2 - 2e^{y-2x}$ und $f'_y(x,y) = 2yx^2 + e^{y-2x}$.
An der Basisstelle (1,2) ist $f(1,2) = 1 \cdot 4 + 1 = 5$, $f'_x(1,2) = 8 - 2 = 6$, $f'_y(1,2) = 4 + 1 = 5$.
Also $\mathcal{E}_x^f(1,2) = 1 \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$ und $\mathcal{E}_y^f(1,2) = 2 \cdot \frac{5}{5} = 2$.

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{100} + 2 \cdot \frac{1}{100} = \frac{12}{500} + \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 100} = \frac{22}{500} = 0.044$
d.h. die relative Veränderung von $f(1,2) = 5$ zu $f(1.02, 2.02)$ ist ca. 4.4%.

[10] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = (x^2 - y^2) \cdot e^{-x^2-y^2} \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Die zweiten partiellen Ableitungen sind hierbei gegeben:
$f''_{xx}(x,y) = (2 - 10x^2 + 4x^4 + 2y^2 - 4x^2y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$
$f''_{yy}(x,y) = (-2 + 10y^2 - 4y^4 - 2x^2 + 4x^2y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$
$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (4x^3y - 4xy^3) \cdot e^{-x^2-y^2}$
HINWEIS: Es gibt 5 stationäre Punkte (x,y), also bitte keinen übersehen!

Ergebniskontrolle

$f'_x(x,y) = 2x \cdot e^{-x^2-y^2} + (x^2 - y^2) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2-y^2} = (2x - 2x^3 + 2xy^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$
$f'_y(x,y) = (-2y) \cdot e^{-x^2-y^2} + (x^2 - y^2) \cdot (-2y) \cdot e^{-x^2-y^2} = (-2y - 2yx^2 + 2y^3) \cdot e^{-x^2-y^2}$

Bestimmen der stationären Punkte (beachte, dass $e^z > 0$ für jedes $z \in \mathbb{R}$):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2x^3 + 2xy^2 & = & 0 \\ -2y - 2yx^2 + 2y^3 & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(1 - x^2 + y^2) & = & 0 \\ y(-1 - x^2 + y^2) & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x = 0 & \text{oder} & 1 - x^2 + y^2 = 0 \\ y = 0 & \text{oder} & -1 - x^2 + y^2 = 0 \end{array} \right\}$$

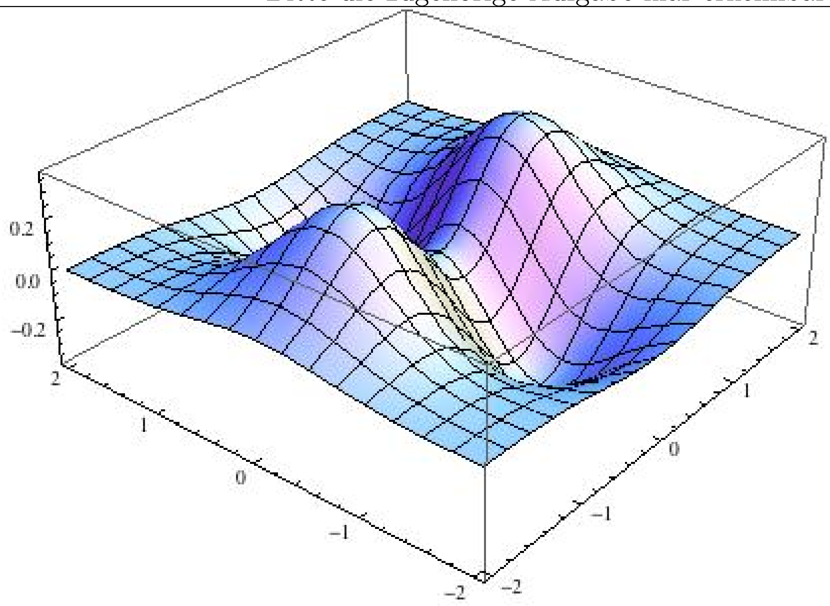
Daraus ergeben sich die stationären Punkte $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,1)$, $P_3 = (0,-1)$, $P_4 = (1,0)$ und $P_5 = (-1,0)$ (durch auflösen einer der 4 möglichen Kombinationen, z.B. ergibt $x = 0$ und $-1 - x^2 + y^2 = 0$ die y-Werte $\pm$ 1).

[Hier die Variante, $H_D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) direkt ausrechnen:]

$$H_D(x_0,y_0) := f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy}(x_0,y_0))^2$$

- $H_D(0,0) = 2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt mit Funktionswert $f(0,0) = 0$.
- $H_D(0,1) = 4e^{-1} \cdot 4e^{-1} - 0 = 16e^{-2} > 0$ und $f''_{xx} > 0 \Rightarrow$ Minimalstelle mit Funktionswert $f(0,1) = -e^{-1}$
- $H_D(0,-1) = 4e^{-1} \cdot 4e^{-1} - 0 = 16e^{-2} > 0$ und $f''_{xx} > 0 \Rightarrow$ Minimalstelle mit Funktionswert $f(0,-1) = -e^{-1}$
- $H_D(1,0) = -4e^{-1} \cdot -4e^{-1} - 0 = 16e^{-2} > 0$ und $f''_{xx} < 0 \Rightarrow$ Maximalstelle mit Funktionswert $f(1,0) = e^{-1}$
- $H_D(-1,0) = -4e^{-1} \cdot -4e^{-1} - 0 = 16e^{-2} > 0$ und $f''_{xx} < 0 \Rightarrow$ Maximalstelle mit Funktionswert $f(-1,0) = e^{-1}$

(Ein Bild der Funktion gibt es im Anhang)



2 Hügel und 2 Krater!