# Mathematik für Ökonomen – WS 2011/12 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

## Klausur Mathematik 1

07.02.2012, 13:30-15:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

**Matrikelnummer** ______________________

**Name** ______________________

**Vorname** ______________________

**Geburtsdatum** ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

**Unterschrift** ______________________

Abschnitt für Korrektur!

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

**(1)** $2y + x \leq 15$

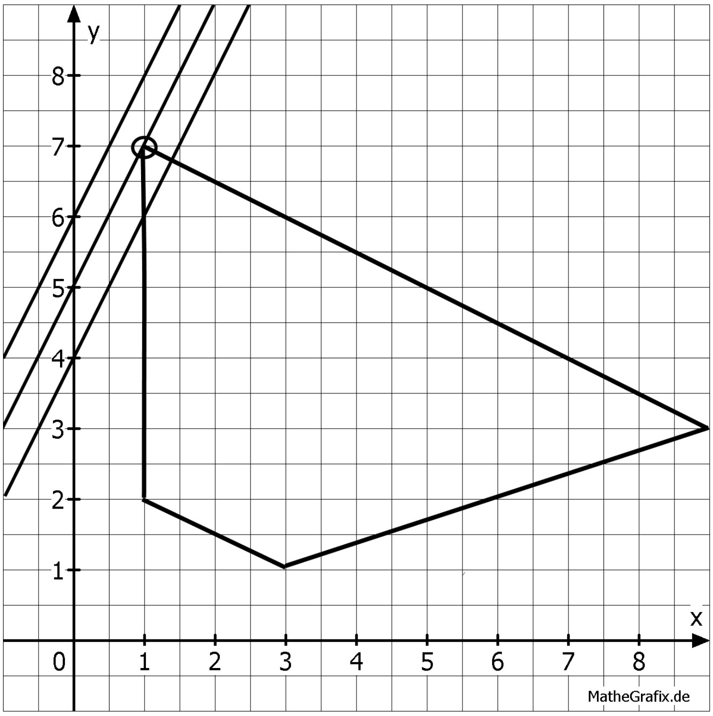
**(2)** $x \geq 1$

**(3)** $2y + x \geq 5$

**(4)** $y - \frac{1}{3}x \geq 0$

**Ergebniskontrolle:**

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y) : y \leq \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x \text{ und } x \geq 1 \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \text{ und } y \geq \frac{1}{3}x \right\}$$




(Ersatzvorlage siehe Anhang)

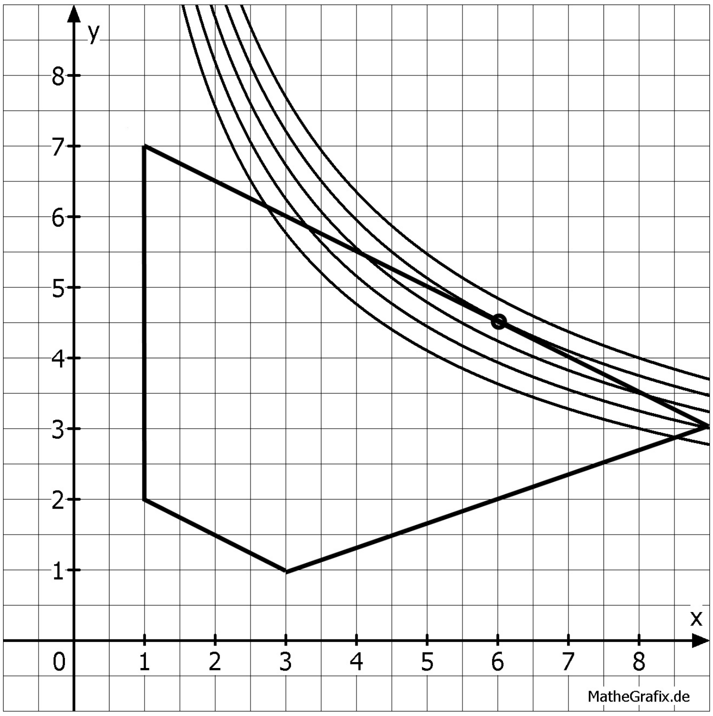
[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = -2x + y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem $z$-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) $(x_0, y_0)$ markieren. Maximalstelle $(x_0, y_0)$ und Maximalwert $z_0$ rechnerisch bestimmen.

**Ergebniskontrolle:**

Zielgeradenschar: $y = z + 2x$, $z$ variabel.
Da $b > 0$ in $z = ax + by$, bedeutet Maximierung von $z$ eine Verschiebung nach oben. Die Maximalstelle $(x_0, y_0)$ ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (1) $y = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x$ und (2) $x = 1$. Also $x_0 = 1$. Einsetzen in (1) liefert $y_0 = 7$. Die Maximalstelle $(x_0 = 1, y_0 = 7)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = 5$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{2}{3}}y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem $z$-Wert hervorheben, Maximalstelle $(x_0, y_0)$ markieren. Maximalstelle $(x_0, y_0)$ und Maximalwert $z_0$ rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.




(Ersatzvorlage siehe Anhang)

**Ergebniskontrolle:**

Optisch ergibt sich (1) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im “Innern” des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (1) $\frac{15}{2} - \frac{1}{2}x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{2/3} \cdot (\frac{15}{2} - \frac{1}{2}x) = \frac{15}{2}x^{2/3} - \frac{1}{2}x^{5/3}$.

b) $f'(x) = 5x^{-1/3} - \frac{5}{6}x^{2/3}$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und $x$ auflösen, liefert $x_0 = 6$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = 4.5$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^{2/3} \cdot y_0 = (6)^{2/3} \cdot 4.5$.

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

**(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot n^3 \ + n^2 \ - \ 4}{n^3 \ - \ 5\cdot n \ + 8} = \ ?$

**(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=5}^{n} \dfrac{9^{k-4}}{10^{k-3}} = \ ?$

**(c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} =?$

Untere Summengrenze beachtet?

**Ergebniskontrolle:**

(a) $= 2.$

(b) $= \sum\limits_{k=5}^{\infty} \dfrac{9^{k-4}}{10^{k-3}} = \frac{9}{100}\frac{1}{1-9/10} = \frac{9}{10}.$

(c) $= \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}.$

[4] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ zunehmen, soll sich in $n$ Wochen zu einem Wert $s_n$ aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die $n$-te Zahlung $a_n$ und die Summe $s_n$ aus $d$, $n$ und dem Anfangswert $a_1$?

(b) $n = 20$ und $|d| = 2$ werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung $a_1$ haben, damit das Summenziel $s_n = 600$ mit der letzten Zahlung $a_{20}$ genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung $a_{20}$?

**Ergebniskontrolle:**

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $600 = 20 \cdot a_1 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 2 \Rightarrow 30 = a_1 + 19 \Rightarrow 11 = a_1$.

$a_{20} = 11 + 19 \cdot 2 = 49$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei ist $E$ die $3 \times 3$-Einheitsmatrix und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -15 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $(A + E + E) \cdot B^T$

(b) $C^{-1}$

**Ergebniskontrolle:**

(a) $A + E + E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ ; $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ ; $(A + E + E) \cdot B^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & 0 & 15 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) Die dritte Spalte von $C$ ist das $(-5)-$fache von der ersten Spalte, also $C$ nicht invertierbar, also $C^{-1}$ nicht definiert!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

| | | Endprodukte | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
| Zwischenprodukte | $Z_1$ | 0 | 1 | 1 |
| | $Z_2$ | 1 | 1 | 0 |
| | $Z_3$ | 2 | 0 | 1 |

| | | Zwischenprodukte | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ |
| Rohstoffe | $R_1$ | 1 | 2 | 1 |
| | $R_2$ | 2 | 1 | 2 |

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

**(a)** Berechnen Sie $M_{RE}$, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

**(b)** Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

**Ergebniskontrolle:**

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 35 \end{pmatrix} = 155$

[4] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert $K_x$, der um 120% über dem Anfangswert liegen soll.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ (d.h. $K_x = K_5$). Erforderliche Rendite $i = p\% =?$

(b) Gegeben: $i = 25\%$. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der $n$-ten Verzinsung soll $K_n$ <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

Hilfswerte: $2.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.17$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 2.2 \approx 0.79$, $\ln 2.25 \approx 0.81$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

**Ergebniskontrolle:**

$K_x - K_0 = 1.2K_0$, also $K_x = 2.2 \cdot K_0$

(a) $2.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^5 \Leftrightarrow 1 + i \approx (2.2)^{\frac{1}{5}} \approx 1.17 \Leftrightarrow i = 0.17 = 17\%$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.25)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2.2)}{\ln(1.25)} \approx \frac{0.79}{0.22} = \frac{79}{22}$; $n = \lceil x \rceil = 4$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$\frac{1}{2} \leq \left(1 + 2 \cdot e^{-|x|}\right)^{-1}$$

**Ergebniskontrolle:**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \leq \left(1 + 2 \cdot e^{-|x|}\right)^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + 2 \cdot e^{-|x|} \leq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & e^{-|x|} \leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & -|x| \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & |x| \geq -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ oder } x \geq -\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\ln 2 \text{ oder } x \geq \ln 2\}.$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix $B$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe gemacht?

**Ergebniskontrolle:**

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | Protokoll |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | I |
| 2 | 1 | -3 | 0 | 1 | 0 | II |
| 2 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | III |
| 2 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | I |
| 0 | 2 | -2 | -1 | 1 | 0 | II - I |
| 0 | 0 | 2 | -1 | 0 | 1 | III - I |
| 2 | -1 | 0 | 1/2 | 0 | 1/2 | I + 1/2 III |
| 0 | 2 | 0 | -2 | 1 | 1 | II + 1/2 III |
| 0 | 0 | 2 | -1 | 0 | 1 | III |
| 2 | 0 | 0 | -1/2 | 1/2 | 1 | I + 1/2 II |
| 0 | 2 | 0 | -2 | 1 | 1 | II |
| 0 | 0 | 2 | -1 | 0 | 1 | III |
| 1 | 0 | 0 | -1/4 | 1/4 | 1/2 | 1/2 I |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 1/2 | 1/2 | 1/2 II |
| 0 | 0 | 1 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1/2 III |

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_b$ des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 3 & -1 & 12 \\ 2 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -3 & 20 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[7] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei $Y$ unbekannt ist:

$$Y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für $Y$.

**Ergebniskontrolle:**

(a) Beim LGS $Ax = b$ ist eine Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{lcll} x_1 & = & 8 & \\ x_2 & = & 4/3 & + \; 1/3 \cdot x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & \end{array} \right\}$$

(b) $Y \cdot A = B \Leftrightarrow A^T \cdot Y^T = B^T$. Die Lösung von $A^T \cdot X = B^T$ (GJ-Algorithmus) ergibt durch transponieren ($Y = X^T$) die Lösung von $Y \cdot A = B$. [Siehe Thema 5.2 / Bsp. 7-8]

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b_1$ | $b_2$ | Protokoll |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | -1 | 0 | 1 | I |
| 2 | 1 | 1 | -1 | 1 | II |
| 1 | 2 | -1 | 0 | 1 | I |
| 0 | - 3 | 3 | -1 | -1 | II - 2 I |
| 1 | 2 | -1 | 0 | 1 | I |
| 0 | 1 | -1 | 1/3 | 1/3 | (-1/3) II |
| 1 | 0 | 1 | - 2/3 | 1/3 | I - 2 I |
| 0 | 1 | -1 | 1/3 | 1/3 | II |

Lösung $X$ von $A^T \cdot X = B^T$ spaltenweise, d.h. Lösung $Y = X^T$ von $Y \cdot A = B$ zeilenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \{x_1 = -2/3 - x_3,\ x_2 = 1/3 + x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{L}_2 = \{x_1 = 1/3 - x_3,\ x_2 = 1/3 + x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\},$$

wobei die $x_3$ in $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} -2/3 - a & 1/3 + a & a \\ 1/3 - b & 1/3 + b & b \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$