Mathematik für Ökonomen – WS 11/12 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

07.02.2012, 16:00-18:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Matrikelnummer ______________________

Name ______________________

Vorname ______________________

Geburtsdatum ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer - als „Nach-der-Klausur-Service“.

Einige Aufgaben lassen sich auf verschiedenen Wegen lösen und sofern keine besondere Methode verlangt wurde, ist jeder nachvollziehbare Rechenweg auch in Ordnung.

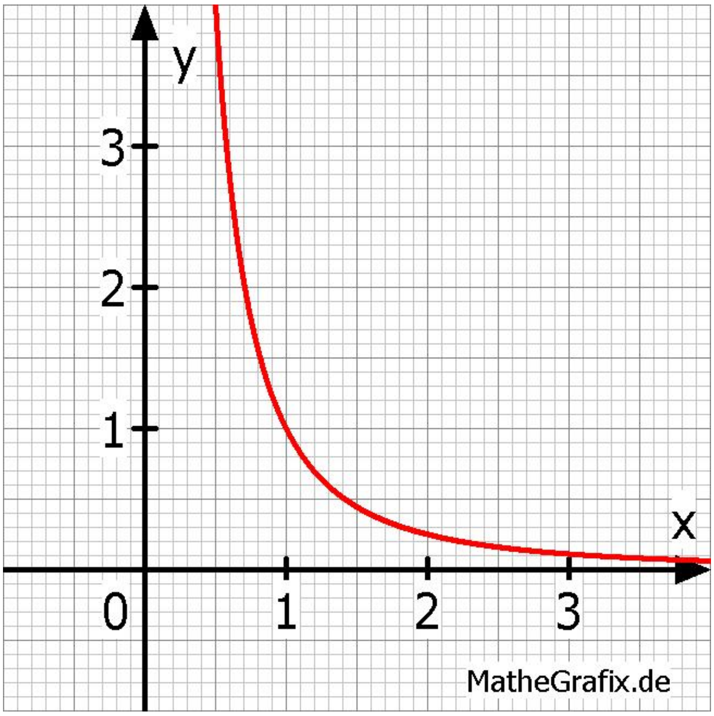
[2] Geben Sie an, die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} =?,\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} =?$$

und untermauern Sie ihre Ergebnisse, mit einer Skizze des Funktionsverlaufs.

Ergebniskontrolle:

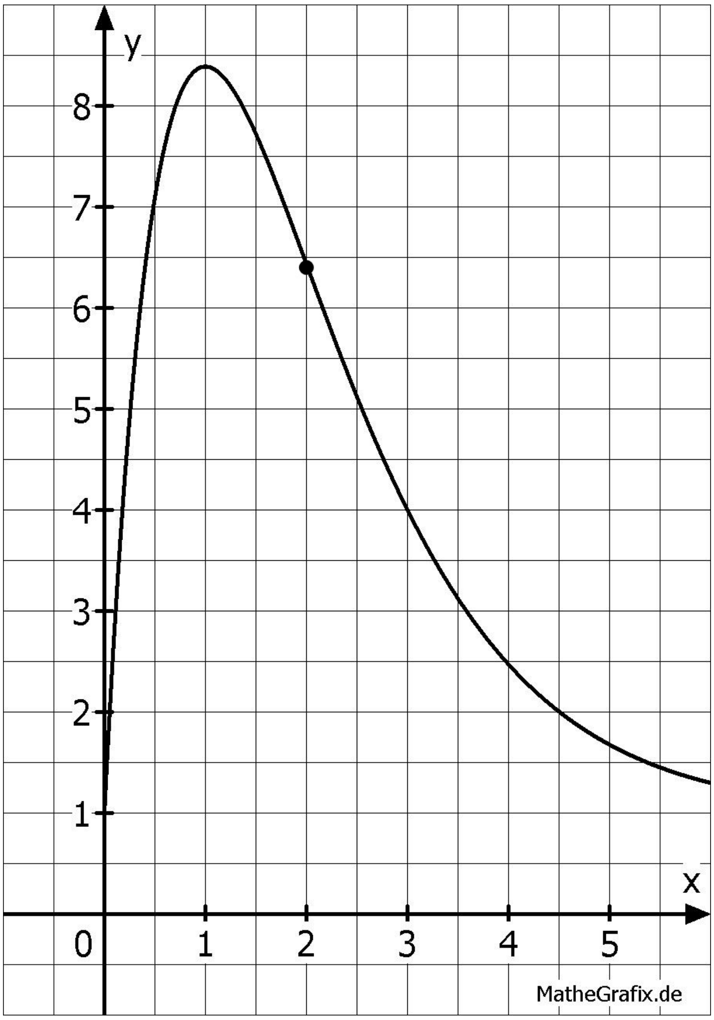
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty,\ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$



[6] Gegeben $f(x) = 1 + x \cdot e^{3-x}$ mit $D(f) = [0, 6]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = (1 - x) \cdot e^{3-x}$, die lokale Maximalstelle $x = 1$ mit dem Wert $f(1) = 1 + e^2 \approx 8.39$. Hilfswert: $e^1 \approx 2.72$

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(0) = 1$, $f(1) \approx 8.39$, $f(3) = 4$, $f(4) \approx 2.47$, $f(5) \approx 1.68$, $f(6) \approx 1.3$]



Ergebniskontrolle
$f''(x) = (x - 2) \cdot e^{3-x}$.
Also $f''(x) \leq 0$ für $x \in [0, 2]$, d.h. f kokav über $[0, 2]$,
und $f''(x) \geq 0$ für $x \in [2, 6]$, d.h. f konvex über $[2, 6]$.
Wendepunkt an der Stelle $x = 2$ mit dem Wert $f(2) = 1 + 2 \cdot e^1 \approx 6.44$.

(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = 3$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(3)$ bei einer relativen Erhöhung von x gegenüber $x_0 = 3$ um 4%.

Ergebniskontrolle
$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{(1-x)\cdot e^{3-x}}{1+x\cdot e^{3-x}}$. Für $x_0 = 3$ ist $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(3) \cdot 4\%$.
Mit $f(3) = 4$ [siehe auch (a)] und $f'(3) = -2$ ist $\mathcal{E}^f(3) = -\frac{6}{4}$, also $\frac{df}{f} \approx -\frac{6}{4} \cdot 4\% = -6\%$

[2] (a) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+\ln x+(x-3)^2}{e^x}$ mit der L'Hopital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

[5] (b) Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie den Wert der Zahl α rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 2$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-(4-x)^2}{2x-4} & \text{für} \quad 0 < x < 2 \\ \alpha & \text{für} \quad x = 2 \\ \frac{x^2}{3x-5} & \text{für} \quad 2 < x \leq 7 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x2+\ln x+(x-3)^2}{e^x} \overset{\text{LHR}\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x+\frac{1}{x}+2(x-3)}{e^x} \overset{\text{LHR}\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}+2}{e^x} = 0$$

(b)

LGW in $x_0 = 2$: $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-(4-x)^2}{2x-4} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2x-2(4-x)(-1)}{2} = \frac{2x+8-2x}{2} = 4$
RGW in $x_0 = 2$: $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2}{3x-5} = \frac{4}{1} = 4$

f ist stetig in $x_0 = 2 \Leftrightarrow$ LGW $=$ RGW $=$ FW in x_0, d.h. $4 =$ LGW $=$ RGW $=$ FW $= \alpha$.

Also f ist stetig in x_0 mit $\alpha = 4$.

[4] Folgende Bestimmungsgleichung ist für x zu lösen:

$$x^4 + x^3 \stackrel{!}{=} 3.4$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 1$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).

Ergebniskontrolle

$f(x) = x^4 + x^3 - 3.4 \stackrel{!}{=} 0$; $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

$x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n))$; Startwert $x_0 = 1$;

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0)) = 1 - (f(1)/f'(1)) = 1 - (-1.4/7) = 1 - (-0.2) = 1.2$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.2 - \frac{f(1.2)}{f'(1.2)} = [1.2 - \frac{(1.2)^4+(1.2)^3-3.4}{4\cdot(1.2)^3+3\cdot(1.2)^2} \approx 1.18988604]$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_4^{16} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 4 \cdot t & \text{für } \ 4 \leq t < 9 \\ e^{t/7} & \text{für } \ t = 9 \\ t^{-1/2} & \text{für } \ 9 < t \leq 16 \end{cases}$

<u>Ergebniskontrolle</u>

$\int_4^{16} f(t) dt = \int_4^9 4t\ dt + \int_9^{16} t^{-1/2} dt = [2t^2]_4^9 + [2 \cdot t^{1/2}]_9^{16} = 162 - 32 + 8 - 6 = 132$

[4] Für $0 \leq x$ sei $F(x) := F(0) + \int_0^x (2t) \cdot e^{-t}\, dt$, wobei $F(0)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(0) = 0$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle

Mit $f(t) = 2t$, $g(t) = -e^{-t}$ ist $f'(t) = 2$ und $g'(t) = e^{-t}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\limits_0^x (2t) \cdot e^{-t} dt = [(2t) \cdot (-e^{-t})]_0^x - \int\limits_0^x 2 \cdot (-e^{-t}) dt = [-2te^{-t}]_0^x - [2e^{-t}]_0^x \\ &= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2 = -2e^{-x}(x+1) + 2 \end{aligned}$$

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = (x-2)^{-3}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 3$ und damit eine Näherung für den Wert $f(3.01) = (1.01)^{-3}$

Ergebniskontrolle

$f(3) = 1$; $f'(x) = -3 \cdot (x-2)^{-4}$; $f'(3) = -3$; $f''(x) = 12 \cdot (x-2)^{-5}$; $f''(3) = 12$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 = 1 + (-3) \cdot (x-3)^1 + \frac{12}{2} \cdot (x-3)^2$ mit $[x_0 = 3]$.

Damit ist $f(3.01) \approx T_2^f(3.01, 3) = 1 - 0.03 + 0.0006 = 0.9706$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = (x - y) \cdot \ln x$ (x > 0, y > 0)
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle

$f'_x(x, y) = 1 \cdot \ln x + (x - y) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + (x - y) \cdot x^{-1} = \ln x + 1 - yx^{-1}$

$f''_{xx}(x, y) = \frac{1}{x} + yx^{-2}$

$f'_y(x, y) = - \ln x$

$f''_{yy}(x, y) = 0$

$f''_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y) = -\frac{1}{x}$

[5] Gegeben sind die Funktion $f(x,y) = (x+y) \cdot e^{x-1}$
und die Basistelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 2$ und $y_0 = 1$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um $+3\%$ und die y-Variable um -6% verändert.

Ergebniskontrolle

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f_x'(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f_y'(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$
mit $f_x'(x,y) = 1 \cdot e^{x-1} + (x+y) \cdot e^{x-1} = (x+y+1) \cdot e^{x-1}$ und $f_y'(x,y) = e^{x-1}$.
An der Basisstelle (2,1) ist $f(2,1) = 3e$, $f_x'(2,1) = 4e$, $f_y'(2,1) = e$. Also $\mathcal{E}_x^f(2,1) = 2 \cdot \frac{4e}{3e} = \frac{8}{3}$ und $\mathcal{E}_y^f(2,1) = 1 \cdot \frac{e}{3e} = \frac{1}{3}$.

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{8}{3} \cdot 3\% + \frac{1}{3} \cdot (-6\%) = 8\% - 2\% = 6\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(2,1) = 3e$ zu $f(2.06, 0.94)$ ist ca. 6%.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = (x^2 + 5y^2) \cdot e^{-x^2-y^2} \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Die zweiten partiellen Ableitungen sind hierbei gegeben:
$f''_{xx}(x,y) = (2 - 10x^2 - 10y^2 + 4x^4 + 20x^2y^2) \cdot e^{-x^2-y^2}$
$f''_{yy}(x,y) = (10 - 2x^2 - 50y^2 + 4x^2y^2 - 20y^4) \cdot e^{-x^2-y^2}$
$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (-24xy + 4x^3y + 20xy^3) \cdot e^{-x^2-y^2}$
HINWEIS: Es gibt 5 stationäre Punkte (x,y), also bitte keinen übersehen!

Ergebniskontrolle

$f'_x(x,y) = 2x \cdot e^{-x^2-y^2} + (x^2+5y^2)(-2x) \cdot e^{-x^2-y^2} = (2x - 2x^3 - 10y^2x) \cdot e^{-x^2-y^2}$
$f'_y(x,y) = 10y \cdot e^{-x^2-y^2} + (x^2+5y^2)(-2y) \cdot e^{-x^2-y^2} = (10y - 2x^2y - 10y^3) \cdot e^{-x^2-y^2}$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - 2x^3 - 10y^2x & = & 0 \\ 10y - 2x^2y - 10y^3 & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x \cdot (2 - 2x^2 - 10y^2) & = & 0 \\ y \cdot (10 - 2x^2 - 10y^2) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

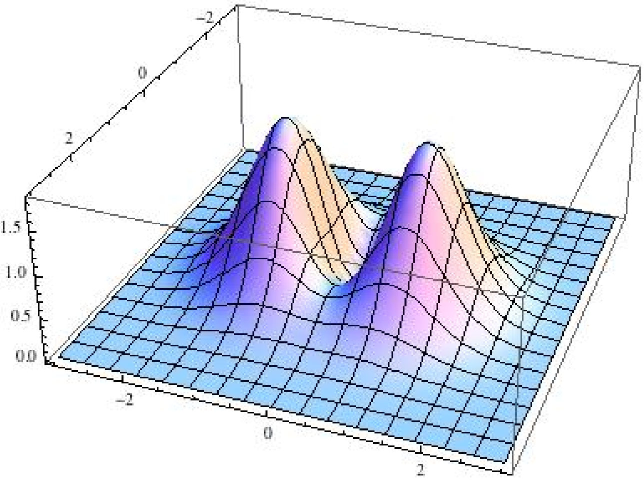
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x = 0 & \text{oder} & 2 - 2x^2 - 10y^2 = 0 \\ y = 0 & \text{oder} & 10 - 2x^2 - 10y^2 = 0 \end{array} \right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (0,0)$, $P2 = (0,1)$, $P3 = (0,-1)$, $P4 = (1,0)$, $P5 = (-1,0)$.
Auflösen der 4 möglichen Kombinationen, z.B ergibt $x = 0$ und $10 - 2x^2 - 10y^2 = 0$ die y-Werte ± 1.

[Hier die Variante, $H_D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) direkt ausrechnen:]

$$H_D(x_0,y_0) := f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy}(x_0,y_0))^2$$

- $H_D(0,0) = 2 \cdot 10 - 0^2 > 0$ und $f''_{xx} > 0 \Rightarrow (0,0)$ Minimalstelle mit Funktionswert $f(0,0) = 0$.
- $H_D(-1,0) = -4e^{-1} \cdot 8e^{-1} - 0^2 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt$(-1,0)$ mit Funktionswert $f(-1,0) = e^{-1}$.
- $H_D(1,0) = -4e^{-1} \cdot 8e^{-1} - 0^2 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt$(1,0)$ mit Funktionswert $f(1,0) = e^{-1}$.
- $H_D(0,1) = -8e^{-1} \cdot -60e^{-1} > 0$ und $f''_{xx} < 0 \Rightarrow$ Maximalstelle mit Funktionswert $f(0,1) = 5e^{-1}$.
- $H_D(0,-1) = -8e^{-1} \cdot -60e^{-1} > 0$ und $f''_{xx} < 0 \Rightarrow$ Maximalstelle mit F-wert $f(0,-1) = 5e^{-1}$.



−2
0
2
1.5
1.0
0.5
0.0
−2
0
2