# Mathematik für Ökonomen – WS 2012/13 – Campus Duisburg

Prof. Dr. U. Herkenrath/PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

# Klausur Mathematik 1

12.02.2013, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

**Platznummer**
**Matrikelnummer**
**Name**
**Vorname**
**Geburtsdatum** ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

**Unterschrift** ____________________________________________

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

_________________________________________________________________

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

**(1)** $2y + x \geq 5$

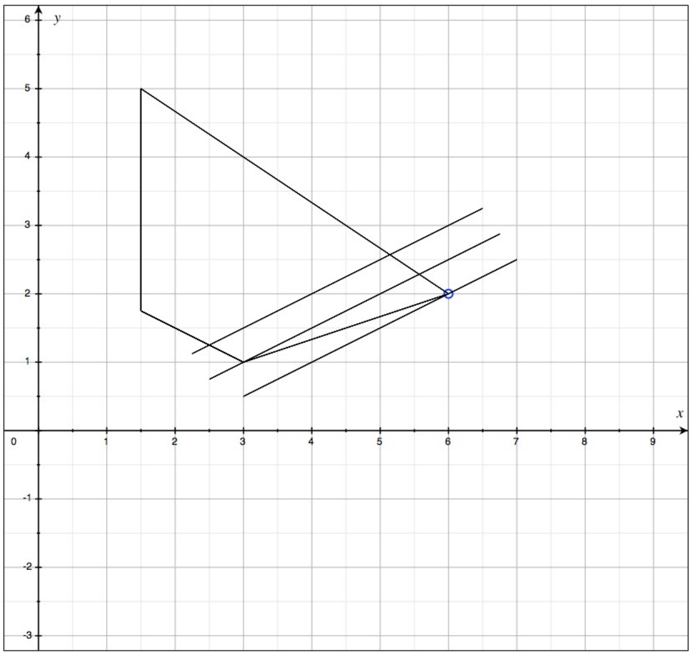
**(2)** $x \geq \frac{3}{2}$

**(3)** $3y - x \geq 0$

**(4)** $3y + 2x \leq 18$

**Ergebniskontrolle:**

$$\mathbb{L} = \left\{(x,y) : y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \text{ und } x \geq \frac{3}{2} \text{ und } y \geq \frac{1}{3}x \text{ und } y \leq 6 - \frac{2}{3}x\right\}$$



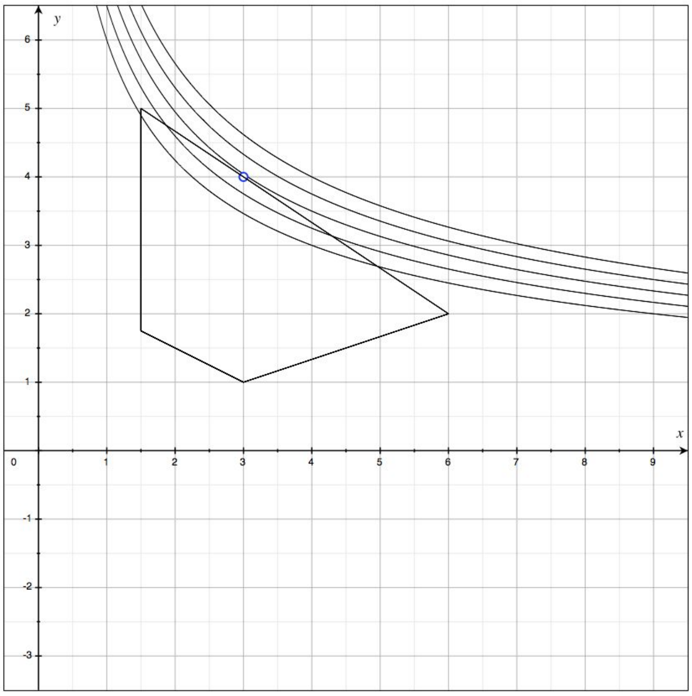
[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x - 2y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem $z$-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) $(x_0, y_0)$ markieren. Maximalstelle $(x_0, y_0)$ und Maximalwert $z_0$ rechnerisch bestimmen.

**Ergebniskontrolle:**

Zielgeradenschar: $y = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x$, $z$ variabel.
Da $b = -2 < 0$ in $z = ax + by$, bedeutet Maximierung von $z$ eine Verschiebung nach unten. Die Maximalstelle $(x_0, y_0)$ ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Beschränkungsgeraden (3) $y = \frac{1}{3}\,x$ und (4) $y = 6 - \frac{2}{3}\,x$. Damit ergibt sich $x_0$ durch Auflösungen der Gleichung $\frac{1}{3}x = 6 - \frac{2}{3}x$. Also $x_0 = 6$. Einsetzen in (3) oder (4) liefert $y_0 = 2$. Die Maximalstelle $(x_0 = 6, y_0 = 2)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = 2$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{1}{2}} y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem $z$-Wert hervorheben, Maximalstelle $(x_0, y_0)$ markieren. Maximalstelle $(x_0, y_0)$ und Maximalwert $z_0$ rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



**Ergebniskontrolle:**

Optisch ergibt sich (4) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im “Innern” des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (4) $y = 6 - \frac{2}{3}x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{1/2} \cdot (6 - \frac{2}{3}x) = 6x^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2}$.

b) $f'(x) = 3x^{-1/2} - x^{1/2}$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und $x$ auflösen, liefert $x_0 = 3$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = 4$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^{1/2} \cdot y_0 = (3)^{1/2} \cdot 4$.

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

**(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot n^2 \; + \; 6 + \; 5\cdot n^3}{10\cdot n^3 \; - \; 17\cdot n^4 \; + 37} = ?$

**(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{2^k}{3^{k-1}} = ?$

**(c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{i}{3}} =?$

Untere Summengrenze beachtet?

**Ergebniskontrolle:**

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot n^2 \; + \; 6 + \; 5\cdot n^3}{10\cdot n^3 \; - \; 17\cdot n^4 \; + 37} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2/n^2 \; + \; 6/n^4 \; + \; 5/n}{10/n \; - \; 17 \; + \; 37/n^4} = 0.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{2^k}{3^{k-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-3} \dfrac{2^{k+3}}{3^{k+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^3}{3^2} \sum\limits_{k=0}^{n-3} \dfrac{2^k}{3^k} = \frac{8}{9} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{8}{9}\frac{1}{1-2/3} = \frac{8}{3}.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{i}{3}} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1-1/2} = 2.$

[4] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ zunehmen, soll sich in $n$ Wochen zu einem Wert $s_n$ aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die $n$-te Zahlung $a_n$ und die Summe $s_n$ aus $d$, $n$ und dem Anfangswert $a_1$?

(b) $n = 10$ und $|d| = 4$ werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung $a_1$ haben, damit das Summenziel $s_n = 250$ mit der letzten Zahlung $a_{10}$ genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung $a_{10}$?

**Ergebniskontrolle:**

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $250 = 10 \cdot a_1 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 4 \Rightarrow 25 = a_1 + 18 \Rightarrow 7 = a_1$.

$a_{10} = 7 + 9 \cdot 4 = 43$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \; C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $B^T \cdot (A + B)$

(b) $C^{-1}$

**Ergebniskontrolle:**

(a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \; ; B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \; ; B^T \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 19 & 22 \\ 20 & 20 & 26 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) Die erste Spalte von $C$ ist das $(-3)-$fache von der dritten Spalte, also $C$ nicht invertierbar, d.h. $C^{-1}$ nicht definiert!

## Aufgabe 5

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

$$\begin{array}{ll|ccc|} & & \multicolumn{3}{c}{\text{Zwischenprodukte}} \\ & & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \cline{3-5} \text{Rohstoffe} & R_1 & 1 & 1 & 2 \\ & R_2 & 2 & 1 & 1 \\ \cline{3-5} \end{array} \qquad \begin{array}{ll|ccc|} & & \multicolumn{3}{c}{\text{Endprodukte}} \\ & & E_1 & E_2 & E_3 \\ \cline{3-5} \text{Zwischenprodukte} & Z_1 & 0 & 2 & 1 \\ & Z_2 & 2 & 2 & 2 \\ & Z_3 & 2 & 0 & 1 \\ \cline{3-5} \end{array}$$

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

**(a)** Berechnen Sie $M_{RE}$, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

**(b)** Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

**Ergebniskontrolle:**

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} = 151$

[4] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert $K_x$, der um 50% über dem Anfangswert liegen soll.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ (d.h. $K_x = K_4$). Erforderliche Rendite $i = p\% =?$

(b) Gegeben: $i = 5\%$. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der $n$-ten Verzinsung soll $K_n$ erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{4}} \approx 1.11$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $\ln 2.25 \approx 0.81$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

**Ergebniskontrolle:**

$K_x - K_0 = 0.5 \cdot K_0$, also $K_x = 1.5 \cdot K_0$

(a) $1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^4 \Leftrightarrow 1 + i \approx (1.5)^{\frac{1}{4}} \approx 1.11 \Leftrightarrow i = 0.11 = 11\%$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.05)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.05)} \approx \frac{0.41}{0.05} = \frac{41}{5}$; $n = \lceil x \rceil = 9$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$\frac{15}{34} \leq \frac{2-|x|^3}{4+2\cdot|x|^3}$$

**Ergebniskontrolle:**

$$\begin{aligned}
& \frac{15}{34} \leq \frac{2-|x|^3}{4+2\cdot|x|^3} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{60+30\cdot|x|^3}{34} \leq 2-|x|^3 \\
\Leftrightarrow\quad & 60+30\cdot|x|^3 \leq 68-34\cdot|x|^3 \\
\Leftrightarrow\quad & 64\cdot|x|^3 \leq 8 \\
\Leftrightarrow\quad & |x|^3 \leq 1/8 \\
\Leftrightarrow\quad & |x| \leq 1/2
\end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq -1/2 \text{ und } x \leq 1/2\} = [-1/2, 1/2].$$

## Aufgabe 8

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix $B$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Probe gemacht?

**Ergebniskontrolle:**

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | Protokoll |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | I |
| 2 | -2 | 2 | 0 | 1 | 0 | II |
| 2 | 6 | -2 | 0 | 0 | 1 | III |
| 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | I |
| 0 | -4 | 0 | -1 | 1 | 0 | II - I |
| 0 | 4 | -4 | -1 | 0 | 1 | III - I |
| 2 | 0 | 2 | 1/2 | 1/2 | 0 | I + 1/2 II |
| 0 | -4 | 0 | - 1 | 1 | 0 | II |
| 0 | 0 | -4 | -2 | 1 | 1 | III + II |
| 2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | 1/2 | I + 1/2 III |
| 0 | -4 | 0 | -1 | 1 | 0 | II + III |
| 0 | 0 | -4 | -2 | 1 | 1 | III |
| 1 | 0 | 0 | -1/4 | 1/2 | 1/4 | 1/2 I |
| 0 | 1 | 0 | 1/4 | -1/4 | 0 | -1/4 II |
| 0 | 0 | 1 | 1/2 | -1/4 | -1/4 | -1/4 III |

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9** Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_b$ des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[7] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei $Y$ unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für $Y$.

(ii) Wie ändert sich die allgemeine Lösung $Y$, wenn in obiger Matrixgleichung auf beiden Seiten von links mit der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

multipliziert wird? Begründen Sie bitte Ihre Aussage.

(iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $Y$, wenn in obiger Matrixgleichung in den Matrizen $A$ und $B$ jeweils alle Elemente verdoppelt werden.

**Ergebniskontrolle:**

(a) Beim LGS $Ax = b$ ist eine Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & = & 1 & + & 3 \cdot x_3 \\ x_2 & = & & - & 2 \cdot x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

(b) zu (i):

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b_1$ | $b_2$ | Protokoll |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | I |
| -4 | 2 | -2 | -2 | 2 | II |
| 1 | 3/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 I |
| -4 | 2 | -2 | -2 | 2 | II |
| 1 | 3/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | I |
| 0 | 8 | 0 | 0 | 4 | II + 4 I |
| 1 | 3/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | I |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 1/8 II |
| 1 | 0 | 1/2 | 1/2 | -1/4 | I - 3/2 II |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | II |

Lösung $Y$ von $A \cdot Y = B$ spaltenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 - x_3/2 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1/4 - x_3/2 \\ 1/2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die $x_3$ in $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} (1/2 - a/2) & (-1/4 - b/2) \\ 0 & 1/2 \\ a & b \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

zu (ii):

$C$ Diagonalmatrix, bei der kein Diagonalelement gleich Null ist, also $C$ invertierbar [vgl. Skript, Bsp 3 zu Nr. 55 ], also

$$C \cdot A \cdot Y = C \cdot B \Leftrightarrow C^{-1} \cdot C \cdot A \cdot Y = C^{-1} \cdot C \cdot B \Leftrightarrow A \cdot Y = B,$$

also ändert sich die allgemeine Lösung $Y$ nicht.

zu (iii):

es gilt

$$(2 \cdot A) \cdot Y = 2 \cdot B \Leftrightarrow A \cdot Y = B,$$

also dieselbe allgemeine Lösung wie bei der Matrixgleichung $A \cdot Y = B$.