Mathematik für Ökonomen – WS 2012/13 – Campus Duisburg

Prof. Dr. U. Herkenrath/PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

12.02.2013, 11:00-13:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ______________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Abschnitt für Korrektur!

[5] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x^{3/2} - \alpha & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x = 1 \\ \frac{\alpha}{x+1} & \text{für} \quad 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:
LGW in $x_0 = 1 : \lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} \beta \cdot x^{3/2} - \alpha = \beta - \alpha$

RGW in $x_0 = 1 : \lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_+} \frac{\alpha}{x+1} = \frac{\alpha}{2} \overset{!}{=} f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$

Also

$$1 = f(1) = \lim_{x \to 1_-} f(x) = \beta - \alpha = \beta - 2.$$

D.h. $\alpha = 2, \beta = 3$.

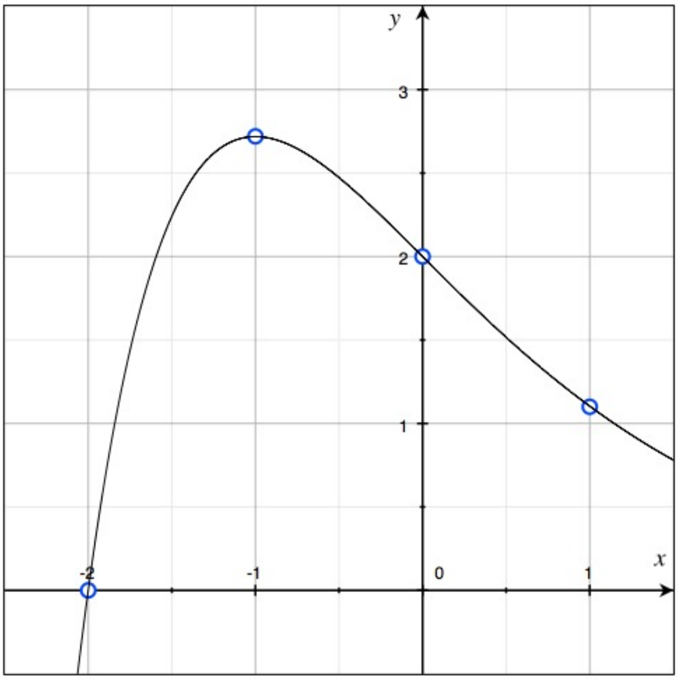
[6] Gegeben $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x}$ mit $D(f) = [-2, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -e^{-x} \cdot (1+x)$, die lokale Maximalstelle $x = -1$ mit dem Wert $f(-1) = e^1$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(-2) = 0$, $f(-1) = e^1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 3 \cdot e^{-1}$]

Ergebniskontrolle:

$f''(x) = x \cdot e^{-x}$.
Also $f''(x) \leq 0$ für $x \in [-2, 0]$, d.h. f konkav über $[-2, 0]$,
und $f''(x) \geq 0$ für $x \in [0, 1]$, d.h. f konvex über $[0, 1]$.
Wendepunkt an der Stelle $x = 0$ mit dem Wert $f(0) = 2$.



(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = -1.5$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(-1.5)$ bei einer relativen Erhöhung von x gegenüber $x_0 = -1.5$ um 4%.

Ergebniskontrolle:

$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = -x \cdot \frac{x+1}{x+2}$.

$\mathcal{E}^f(-1.5) = 1.5 \cdot \frac{-0.5}{0.5} = -1.5 = -\frac{3}{2}$, also $\frac{df}{f} \approx -\frac{3}{2} \cdot 4\% = -6\%$.

D.h. eine relative Erhöhung von $x_0 = -1.5$ um 4% führt zu einer relativen Verminderung von $f(-1.5)$ um ungefähr 6%.

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}+e^{1-x}-x^2+2\cdot x-3}{(x-1)^3}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}+e^{1-x}-x^2+2\cdot x-3}{(x-1)^3} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-e^{1-x}-2\cdot x+2}{3\cdot(x-1)^2} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}+e^{1-x}-2}{6\cdot(x-1)}$$
$$\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-e^{1-x}}{6} = 0.$$

[4] Die Menge x eines Gutes, bei der Angebots- und Nachfragepreis auf dem Markt übereinstimmen, erfülle folgende Bestimmungsgleichung

$$4 \cdot (x+1) = \frac{1}{2} \cdot (36 - x^4)$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 2$, <u>eine</u> Rechnung (erste Iteration) und der <u>Ansatz</u> für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).

Ergebniskontrolle:

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (36 - x^4) - 4 \cdot (x+1) \stackrel{!}{=} 0$; $f'(x) = -2 \cdot x^3 - 4$

$x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n))$; Startwert $x_0 = 2$;

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0)) = 2 - (f(2)/f'(2)) = 2 - 1/10 = 1.9$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.9 - \frac{f(1.9)}{f'(1.9)} = [1.9 + \frac{36 - 1.9^4 - 8 \cdot 2.9}{4 \cdot 1.9^3 + 8} \approx 1.89345016]$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } \ 0 \le t < \ln(2) \\ -1 & \text{für } \ \ln(2) \le t < 1 \\ 1/t^2 & \text{für } \ 1 < t \le 2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(t)dt &= \int_0^{\ln(2)} e^{-t}\ dt + \int_{\ln(2)}^1 (-1)\ dt + \int_1^2 t^{-2} dt = [-e^{-t}]_0^{\ln(2)} + [-t]_{\ln(2)}^1 + [-t^{-1}]_1^2 \\
&= -e^{-\ln(2)} + 1 + (-1) + \ln(2) + (-1/2) + 1 = -1/e^{\ln(2)} + \ln(2) + 1/2 \\
&= -1/2 + \ln(2) + 1/2 = \ln(2)
\end{aligned}$$

[4] Für $0 \leq x$ sei $F(x) := F(0) + \int_0^x (16 \cdot t) \cdot e^{4 \cdot t}\, dt$, wobei $F(0)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(0) = 0$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = 16 \cdot t$, $g'(t) = e^{4 \cdot t}$ ist $f'(t) = 16$ und $g(t) = \frac{e^{4 \cdot t}}{4}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\limits_0^x (16 \cdot t) \cdot e^{4 \cdot t}\, dt = \left[16 \cdot t \cdot \frac{e^{4 \cdot t}}{4}\right]_0^x - \int\limits_0^x 16 \cdot \frac{e^{4 \cdot t}}{4}\, dt = 4 \cdot x \cdot e^{4 \cdot x} - \left[e^{4 \cdot t}\right]_0^x \\ &= 4 \cdot x \cdot e^{4 \cdot x} - e^{4 \cdot x} + 1 \end{aligned}$$

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = \ln(2 \cdot x - 1)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für den Wert $f(1.5) = \ln(2)$.

Ergebniskontrolle:

$f(1) = 0$; $f'(x) = 2/(2 \cdot x - 1)$; $f'(1) = 2$; $f''(x) = -4/(2 \cdot x - 1)^2$; $f''(1) = -4$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = 2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x - 1)^2$ mit $[x_0 = 1]$.

Damit ist $f(1.5) \approx T_2^f(1.5, 1) = 2 \cdot 0.5 - 2 \cdot 0.5^2 = 0.5$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = (3 \cdot x + y)^3 + e^{x \cdot y}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = 3 \cdot (3 \cdot x + y)^2 \cdot 3 + e^{x \cdot y} \cdot y = 9 \cdot (3 \cdot x + y)^2 + y \cdot e^{x \cdot y}$$

$$f''_{xx}(x,y) = 2 \cdot 9 \cdot (3 \cdot x + y) \cdot 3 + y \cdot e^{x \cdot y} \cdot y = 54 \cdot (3 \cdot x + y) + y^2 \cdot e^{x \cdot y}$$

$$f'_y(x,y) = 3 \cdot (3 \cdot x + y)^2 + x \cdot e^{x \cdot y}$$

$$f''_{yy}(x,y) = 6 \cdot (3 \cdot x + y) + x^2 \cdot e^{x \cdot y}$$

$$f''_{xy}(x,y) = f'_{yx}(x,y) = 2 \cdot 3 \cdot (3 \cdot x + y) \cdot 3 + x \cdot e^{x \cdot y} \cdot y = 18 \cdot (3 \cdot x + y) + (1 + x \cdot y) \cdot e^{x \cdot y}$$

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{1/4} \cdot y^{3/4}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 100$ und $y_0 = 400$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um -3% und die y-Variable um 5% verändert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x, y) = 25 \cdot x^{-3/4} \cdot y^{3/4} \text{ und } f'_y(x, y) = 75 \cdot x^{1/4} \cdot y^{-1/4}.$$

Also

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 100 \cdot \frac{25 \cdot x_0^{-3/4} \cdot y_0^{3/4}}{100 \cdot x_0^{1/4} \cdot y_0^{3/4}} = 25 \cdot x_0^{-1} = 25/100 = 1/4,$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 400 \cdot \frac{75 \cdot x_0^{1/4} \cdot y_0^{-1/4}}{100 \cdot x_0^{1/4} \cdot y_0^{3/4}} = 300 \cdot y_0^{-1} = 300/400 = 3/4.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{1}{4} \cdot (-3)\% + \frac{3}{4} \cdot 5\% = 3\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(100, 400)$ zu $f(97, 420)$ beträgt ca. 3%.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x \cdot e^{-x}(y^2 - 4 \cdot y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)
Sie können dabei folgende Angaben verwenden

$$f''_{xx}(x,y) = e^{-x} \cdot (x-2) \cdot (y^2 - 4 \cdot y)$$
$$f''_{yy}(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{-x}$$
$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = e^{-x} \cdot (1-x) \cdot (2 \cdot y - 4)$$

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = e^{-x} \cdot (1-x) \cdot (y^2 - 4 \cdot y)$
$f'_y(x,y) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 \cdot y - 4)$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} e^{-x} \cdot (1-x) \cdot (y^2 - 4 \cdot y) & = & 0 \\ x \cdot e^{-x} \cdot (2 \cdot y - 4) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (1-x) \cdot y \cdot (y-4) & = & 0 \\ x \cdot (2 \cdot y - 4) & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rclcrclcrcl} x & = & 1 & \text{oder} & y & = & 0 & \text{oder} & y & = & 4 \\ 1 \cdot (2 \cdot y - 4) & = & 0 & & (-4) \cdot x & = & 0 & & 4 \cdot x & = & 0 \end{array} \right\}$$

oder

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} 1 \cdot y \cdot (y-4) & = & 0 & \text{oder} & (-4) \cdot (1-x) & = & 0 \\ x & = & 0 & & y & = & 2 \end{array} \right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (0,0), P2 = (0,4), P3 = (1,2)$.

Zur Berechnung der Werte von

$$H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2 = 2 \cdot x \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot (x-2) \cdot (y^2 - 4 \cdot y) - e^{-2 \cdot x} \cdot (1-x)^2 \cdot (2 \cdot y - 4)^2$$

für jeden stationären Punkt (x_0, y_0):

- $H_D(0,0) = 0 - (-4)^2 = -16 < 0 \Rightarrow (0,0)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(0,0) = 0$.
- $H_D(0,4) = 0 - 4^2 = -16 < 0 \Rightarrow (0,4)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(0,4) = 0$.
- $H_D(1,2) = 2 \cdot e^{-2} \cdot (-1) \cdot (-4) - 0 = 8 \cdot e^{-2} > 0$ und $f''_{xx}(1,2) = e^{-1} \cdot (-1) \cdot (-4) = 4 \cdot e^{-1} > 0$ $\Rightarrow (1,2)$ ist eine Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(1,2) = -4 \cdot e^{-1}$.