Mathematik für Ökonomen – WS 2013/14 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 1

11.02.2014, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y \; - \; x \; \leq \; 1$

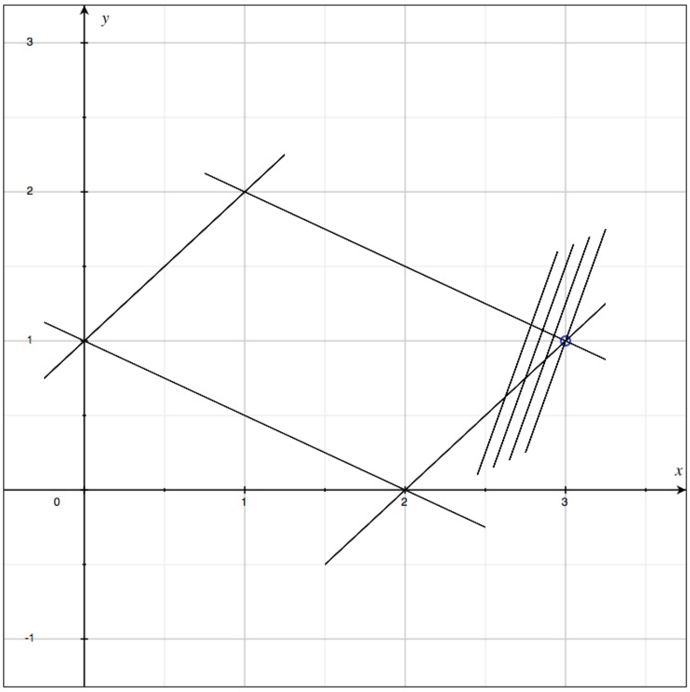
(2) $2 \cdot y \; + \; x \geq \; 2$

(3) $2 \cdot y \; + x \leq \; 5$

(4) $y - x \geq -2$

Ergebniskontrolle:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y) : y \leq x + 1 \text{ und } y \geq -\frac{1}{2} \cdot x + 1 \text{ und } y \leq -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2} \text{ und } y \geq x - 2 \right\}$$



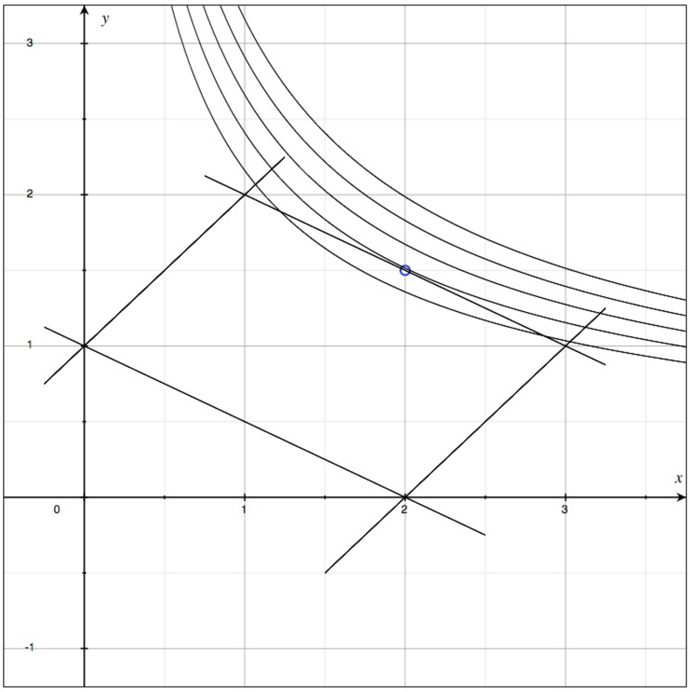
(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = 3 \cdot x - y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Ergebniskontrolle:
Zielgeradenschar: $y = -z + 3 \cdot x$.
Da $b = -1 < 0$ in $z = a \cdot x + b \cdot y$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach unten. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (3) $y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x$ und (4) $y = -2 + x$. Gleichsetzen von (3) und (4) liefert $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x = -2 + x$ und damit $x_0 = 3$. Eingesetzt in (3) oder (4) erhält man $y_0 = 1$. Die Maximalstelle $(x_0 = 3, y_0 = 1)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = 8$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{2}{3}}y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle:
Optisch ergibt sich (3) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im “Innern” des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (3) $y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot (\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x) = \frac{5}{2} \cdot x^{2/3} - \frac{1}{2} \cdot x^{5/3}$.

b) $f'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{-1/3} - \frac{5}{6} \cdot x^{2/3}$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und x auflösen, liefert $x_0 = 2$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = \frac{3}{2}$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^{2/3} \cdot y_0 = 2^{2/3} \cdot \frac{3}{2} = 2^{-1/3} \cdot 3$.

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8 \cdot n^3 \ + n^2 \ - \ 2}{n^4 \ - \ 5 \cdot n^2 \ + 8} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=5}^{n} \dfrac{9^{k-3}}{10^{k-4}} = ?$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right)^i} =?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8 \cdot n^3 + n^2 - 2}{n^4 - 5 \cdot n^2 + 8} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 \cdot (8 \cdot n^{-1} + n^{-2} - 2 \cdot n^{-4})}{n^4 \cdot (1 - 5 \cdot n^{-2} + 8 \cdot n^{-4})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8 \cdot n^{-1} + n^{-2} - 2 \cdot n^{-4}}{1 - 5 \cdot n^{-2} + 8 \cdot n^{-4}} = 0.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=5}^{n} \dfrac{9^{k-3}}{10^{k-4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-5} \dfrac{9^{k+2}}{10^{k+1}} = \frac{9^2}{10^1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{9^k}{10^k} = \frac{81}{10} \frac{1}{1-9/10} = 81.$

(c) $= \sum\limits_{i=0}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right)^i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^i = \frac{1}{1-3/5} = \frac{5}{2}.$

[4] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Wochen zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 20$ und $|d| = 2$ (also $d = -2$) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 600$ mit der letzten Zahlung a_{20} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{20}?

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $600 = 20 \cdot a_1 - \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 2 \Rightarrow 980 = 20 \cdot a_1 \Rightarrow 49 = a_1$.

$a_{20} = 49 - 19 \cdot 2 = 11$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -15 \\ 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $(B + A) \cdot A^T$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $B + A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3} \; ; \; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \; ; \; (B + A) \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) C^{-1} ist nicht definiert, denn die zweite Spalte von C ist eine Nullspalte!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	0	2	2
	Z_2	1	1	0
	Z_3	2	0	1

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	2	1	2
	R_2	1	2	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 4)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 4) \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \end{pmatrix} = 128$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 60% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 25\%$ und ein Zielwert K_x, der 60% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $20\%, 20\%, 0\%, 44\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.6^{\frac{1}{4}} \approx 1.13$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.6 \approx 0.47$, $144^2 = 20736$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_4 = 1.6 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^4 \Leftrightarrow 1 + i = (1.6)^{\frac{1}{4}} \approx 1.13 \Leftrightarrow i = 0.13 = 13\%$

(b) $K_x = 1.6 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.25)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.6)}{\ln(1.25)} \approx \frac{0.47}{0.22} = \frac{47}{22}$; $n = \lceil x \rceil = 3$

(c) $K_4 = (1.2 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.44) \cdot 10000 = 12 \cdot 12 \cdot 144 = 144^2 = 20736$

$i_{\text{eff}} = (1.2 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.44)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.2^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$\frac{2 \cdot |x|^3 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot |x| + 3}{-|x|^3 - x^2 - 4 \cdot |x|} \leq -2$$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \cdot |x|^3 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot |x| + 3}{-|x|^3 - x^2 - 4 \cdot |x|} \leq -2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2 \cdot |x|^3 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot |x| + 3}{|x|^3 + x^2 + 4 \cdot |x|} \geq 2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 \cdot |x|^3 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot |x| + 3 \geq 2 \cdot |x|^3 + 2 \cdot x^2 + 8 \cdot |x| \text{ und } x \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 3 \geq 6 \cdot |x| \text{ und } x \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & |x| \leq \frac{1}{2} \text{ und } x \neq 0
\end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{2} \text{ und } x \leq \frac{1}{2} \right\} \setminus \{0\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\} \setminus \{0\}.$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	-1	2	1	0	0	I
-3	1	2	0	1	0	II
1	-1	1	0	0	1	III
1	1	-2	-1	0	0	$(-1) \cdot$ I
-3	1	2	0	1	0	II
1	-1	1	0	0	1	III
1	1	-2	-1	0	0	I
0	4	- 4	-3	1	0	II $+ 3 \cdot$ I
0	- 2	3	1	0	1	III - I
1	1	-2	-1	0	0	I
0	1	- 1	-3/4	1/4	0	$(1/4) \cdot$ II
0	- 2	3	1	0	1	III
1	0	-1	- 1/4	- 1/4	0	I - II
0	1	- 1	-3/4	1/4	0	II
0	0	1	- 1/2	1/2	1	III $+ 2 \cdot$ II
1	0	0	- 3/4	1/4	1	I + III
0	1	0	- 5/4	3/4	1	II + III
0	0	1	- 1/2	1/2	1	III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	3	-1	1	12
2	-9	3	- 13	4
1	9	-3	7	20

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	b^*
1	0	0	-2	8
0	1	-1/3	1	4/3
0	0	0	0	0

[5] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension besitzt Y?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ sind zwei Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rclcccc} x_1 & = & 8 & & & + & 2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & \frac{4}{3} & + & \frac{1}{3} \cdot x_3 & - & x_4 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & & & \end{array} \right\}$$

(b) zu (i):

$A_{3\times 3} \cdot Y_{m\times n} = B_{3\times 2}$, also $m = 3$ und $n = 2$.

zu (ii):

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	Protokoll
1	2	1	0	-1	I
2	1	5	1	1	II
-1	1	- 4	- 1	- 2	III
1	2	1	0	-1	I
0	- 3	3	1	3	II - 2· I
0	3	- 3	- 1	-3	III + I
1	2	1	0	-1	I
0	- 3	3	1	3	II
0	0	0	0	0	III + II
1	2	1	0	-1	I
0	1	- 1	-1/3	-1	$-1/3 \cdot$ II
0	0	0	0	0	III
1	0	3	2/3	1	I - 2 · II
0	1	- 1	-1/3	-1	II
0	0	0	0	0	III

Lösung Y von $A \cdot Y = B$ spaltenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 - 3 \cdot x_3 \\ -1/3 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 3 \cdot x_3 \\ -1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die x_3 in $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} (2/3 - 3 \cdot a) & (1 - 3 \cdot b) \\ (-1/3 + a) & (-1 + b) \\ a & b \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$