Mathematik für Ökonomen – WS 2013/14 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

11.02.2014, 11:00-13:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 2$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot \alpha \cdot (x+2) & \text{für} \quad 0 \leq x < 2 \\ 2 \cdot \beta & \text{für} \quad x = 2 \\ \frac{x^3}{2} - x & \text{für} \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 2 : \lim\limits_{x \to 2_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2_-} \beta \cdot \alpha \cdot (x+2) = 4 \cdot \beta \cdot \alpha$

RGW in $x_0 = 2 : \lim\limits_{x \to 2_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2_+} \left(\frac{x^3}{2} - 2\right) = 2 \stackrel{!}{=} f(2) = 2 \cdot \beta \Leftrightarrow \beta = 1$

Also

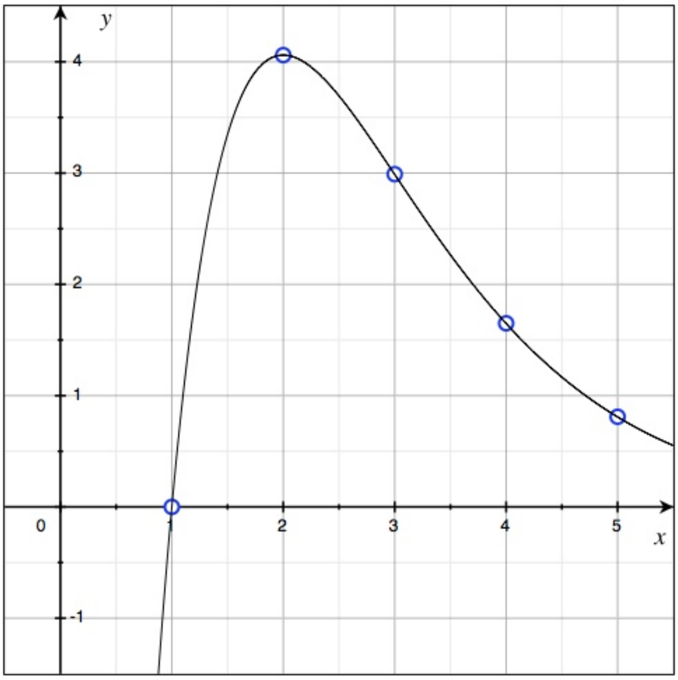
$$2 = f(2) = \lim_{x \to 2_-} f(x) = 4 \cdot \beta \cdot \alpha = 4 \cdot \alpha.$$

D.h. $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$.

[6] Gegeben $f(x) = 30 \cdot (x-1) \cdot e^{-x}$ mit $D(f) = [1,5]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 60 \cdot e^{-x} - 30 \cdot x \cdot e^{-x}$, die lokale Maximalstelle $x = 2$ mit dem Wert $f(2) = 30 \cdot e^{-2}$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(1) = 0$, $f(2) = 30 \cdot e^{-2}$, $f(3) = 60 \cdot e^{-3}$, $f(4) = 90 \cdot e^{-4}$, $f(5) = 120 \cdot e^{-5}$]



Ergebniskontrolle:
$f''(x) = -60 \cdot e^{-x} - 30 \cdot e^{-x} + 30 \cdot xe^{-x} = 30 \cdot e^{-x} \cdot (x-3)$.
Also $f''(x) \leq 0$ für $x \in [1,3]$, d.h. f konkav über $[1,3]$,
und $f''(x) \geq 0$ für $x \in [3,5]$, d.h. f konvex über $[3,5]$.
Außerdem $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$, d.h. Wendepunkt an der Stelle $x = 3$ mit dem Wert $f(3) = 60 \cdot e^{-3}$.

(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = 4$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(4)$ bei einer relativen Verminderung von x gegenüber $x_0 = 4$ um 3%.

Ergebniskontrolle:
$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{60 \cdot e^{-x} - 30 \cdot x \cdot e^{-x}}{30 \cdot (x-1) \cdot e^{-x}} = x \cdot \frac{2-x}{x-1}$.
Für $x_0 = 4$ ist $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(4) \cdot (-3\%) = (-\frac{8}{3}) \cdot (-3\%) = 8\%$.

D.h. eine relative Verminderung von $x_0 = 4$ um -3% führt zu einer relativen Erhöhung von $f(4)$ um ungefähr 8%.

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-1)^3 + e^{-3\cdot x} - \frac{3}{2}\cdot x^2}{x^3 - x^2 - 2\cdot x - 2 + 2\cdot e^x}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^3 + e^{-3\cdot x} - \frac{3}{2}\cdot x^2}{x^3 - x^2 - 2\cdot x - 2 + 2\cdot e^x} &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot(x-1)^2 - 3\cdot e^{-3\cdot x} - 3\cdot x}{3\cdot x^2 - 2\cdot x - 2 + 2\cdot e^x} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6\cdot(x-1) + 9\cdot e^{-3\cdot x} - 3}{6\cdot x - 2 + 2\cdot e^x} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6 - 27\cdot e^{-3\cdot x}}{6 + 2\cdot e^x} = -\frac{21}{8}.
\end{aligned}$$

[4] Zur Berechnung der Rendite $i_{eff} = x - 1$ einer Anlageform ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$x^3 + 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x \stackrel{!}{=} 21$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 2$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).

Ergebniskontrolle:

$f(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 21 \stackrel{!}{=} 0$; $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 5$

$x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n))$; Startwert $x_0 = 2$;

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0)) = 2 - (f(2)/f'(2)) = 2 - \dfrac{8 + 8 + 10 - 21}{12 + 8 + 5} = 2 - \dfrac{2}{10} = 1.8$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.8 - \frac{f(1.8)}{f'(1.8)} = [1.8 - \frac{1.8^3 + 2 \cdot 1.8^2 + 5 \cdot 1.8 - 21}{3 \cdot 1.8^2 + 4 \cdot 1.8 + 5} \approx 1.7858]$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\ln 10} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 1/t^2 & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ e^t/20 & \text{für } 2 \leq t < \ln 10 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 10} f(t)dt &= \int_0^1 2\ dt + \int_1^2 1/t^2\ dt + \int_2^{\ln 10} e^t/20\ dt = [2t]_0^1 + [-1/t]_1^2 + [e^t/20]_2^{\ln 10} \\ &= 2 + (-1/2 + 1) + (1/2 - e^2/20) = 3 - e^2/20 \end{aligned}$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x 4t \cdot \ln t \, dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = -1$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = \ln t$, $g'(t) = 4t$ ist $f'(t) = t^{-1}$ und $g(t) = 2t^2$.

$$\begin{aligned} F(x) &= -1 + \int_1^x t \cdot \ln t \, dt = -1 + \left[2t^2 \cdot \ln t\right]_1^x - \int_1^x 2 \cdot t \, dt = -1 + 2x^2 \ln x - \left[t^2\right]_1^x \\ &= -1 + 2x^2 \cdot \ln x - x^2 + 1 = 2x^2 \cdot \ln x - x^2 \end{aligned}$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = \ln((x+1)/2)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(3) = \ln 2$.

Ergebniskontrolle:

$f(1) = 0$; $f'(x) = 1/(x+1)$; $f'(1) = 1/2$; $f''(x) = -1/(x+1)^2$; $f''(1) = -1/4$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot (x-1) - \frac{1}{8} \cdot (x-1)^2$ mit $[x_0 = 1]$.

Damit ist $f(3) \approx T_2^f(3,1) = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = e^{x\cdot y^2}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = y^2 \cdot e^{x\cdot y^2}$

$f''_{xx}(x,y) = y^4 \cdot e^{x\cdot y^2}$

$f'_y(x,y) = 2 \cdot x \cdot y \cdot e^{x\cdot y^2}$

$f''_{yy}(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x\cdot y^2} + (2 \cdot x \cdot y) \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot e^{x\cdot y^2} = 2 \cdot x \cdot e^{x\cdot y^2} \cdot \left(1 + 2 \cdot x \cdot y^2\right)$

$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 2 \cdot y \cdot e^{x\cdot y^2} + (2 \cdot x \cdot y) \cdot y^2 \cdot e^{x\cdot y^2} = 2 \cdot y \cdot e^{x\cdot y^2} \cdot \left(1 + x \cdot y^2\right)$

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x,y) = 12 \cdot x^{1/3} \cdot y^{2/3}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 8000$ und $y_0 = 1000$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um 30% und die y-Variable um -30% verändert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x,y) = 8 \cdot x^{-2/3} \cdot y^{2/3} = 4 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3} \text{ und } f'_y(x,y) = 8 \cdot x^{1/3} \cdot y^{-1/3} = 8 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{1/3}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (8000, 1000)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = 8000 \cdot \frac{4 \cdot \left(\frac{1000}{8000}\right)^{2/3}}{12 \cdot 8000^{1/3} \cdot 1000^{2/3}} = 8000 \cdot \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{12 \cdot 20 \cdot 100} = \frac{1}{3},$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = 1000 \cdot \frac{8 \cdot \left(\frac{8000}{1000}\right)^{1/3}}{12 \cdot 8000^{1/3} \cdot 1000^{2/3}} = 1000 \cdot \frac{8 \cdot 2}{12 \cdot 20 \cdot 100} = \frac{2}{3}.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{1}{3} \cdot 30\% + \frac{2}{3} \cdot (-30\%) = -10\%$
d.h. die relative Veränderung von $f(8000, 1000)$ zu $f(10400, 700)$ beträgt ca. -10%.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 2 \cdot x \cdot y^3 + 3 \cdot y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:
$f'_x(x,y) = 2 \cdot x + 2 \cdot y^3$
$f'_y(x,y) = 6 \cdot x \cdot y^2 + 6 \cdot y$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 \cdot x + 2 \cdot y^3 & = & 0 \\ 6 \cdot x \cdot y^2 + 6 \cdot y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y^3 \\ x \cdot y^2 + y & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y^3 \\ -y^5 + y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y^3 \\ y \cdot (1 - y^4) & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y^3 \\ y & = & 0 \quad \text{oder} \quad y = -1 \quad \text{oder} \quad y = 1 \end{array} \right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (0,0), P2 = (1,-1), P3 = (-1,1)$.

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0):

$f''_{xx}(x,y) = 2$
$f''_{yy}(x,y) = 12 \cdot x \cdot y + 6$
$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 6 \cdot y^2$

- $H_D(0,0) = 2 \cdot 6 - 0 = 12 > 0$ und $f''_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ ist eine Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(0,0) = 0$.
- $H_D(1,-1) = 2 \cdot (-6) - 36 = -48 < 0 \Rightarrow (1,-1)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(1,-1) = 2$.
- $H_D(-1,1) = 2 \cdot (-6) - 36 = -48 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ ist eine Sattelpunktstelle mit Funktionswert $f(-1,1) = 2$.