Mathematik für Ökonomen – WS 2014/15 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 1

17.02.2015, 10:00-12:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y \;-\; x \;\geq\; -2$

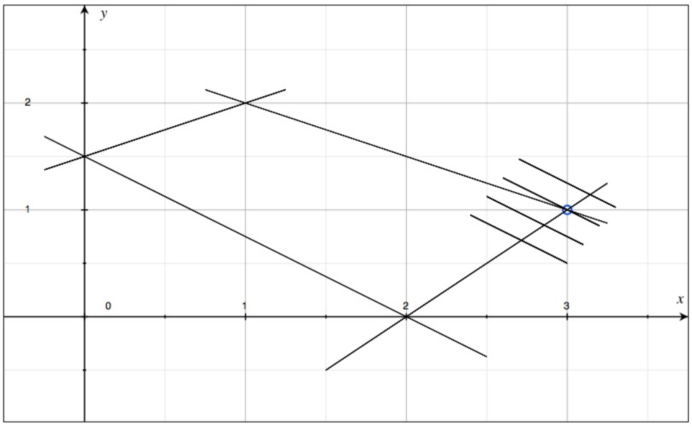
(2) $2 \cdot y \;+\; x \leq \;5$

(3) $2 \cdot y \;- x \leq \;3$

(4) $4 \cdot y + 3 \cdot x \geq 6$

Ergebniskontrolle:

$$\mathbb{L} = \left\{(x, y) : y \geq x - 2 \text{ und } y \leq -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2} \text{ und } y \leq \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \text{ und } y \geq -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2}\right\}$$



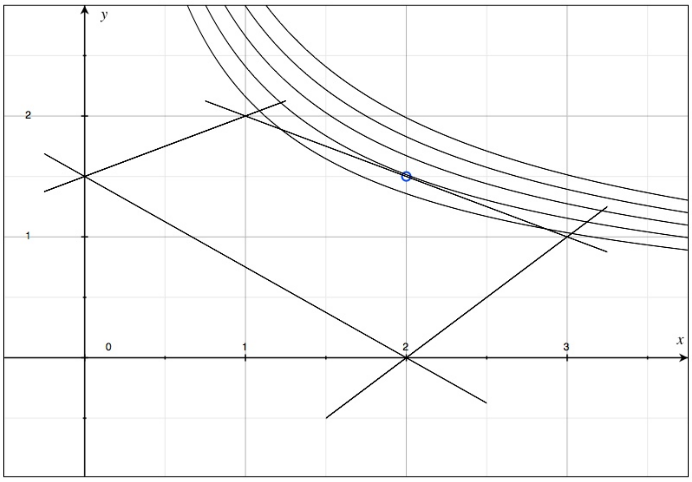
(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = \frac{3}{4} \cdot x + y$
„halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.

Ergebniskontrolle:
Zielgeradenschar: $y = z + \frac{3}{4} \cdot x$.
Da $b = 1 > 0$ in $z = a \cdot x + b \cdot y$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach oben. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (2) $y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x$ und (1) $y = -2 + x$. Gleichsetzen von (2) und (1) liefert $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x = -2 + x$ und damit $x_0 = 3$. Eingesetzt in (2) oder (1) erhält man $y_0 = 1$. Die Maximalstelle $(x_0 = 3, y_0 = 1)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = \frac{13}{4}$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{2}{3}} y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle:
Optisch ergibt sich (2) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im “Innern” des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (2) $y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot (\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x) = \frac{5}{2} \cdot x^{2/3} - \frac{1}{2} \cdot x^{5/3}$.

b) $f'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{-1/3} - \frac{5}{6} \cdot x^{2/3}$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und x auflösen, liefert $x_0 = 2$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = \frac{3}{2}$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^{2/3} \cdot y_0 = 2^{2/3} \cdot \frac{3}{2} = 2^{-1/3} \cdot 3$.

[4] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{16\cdot n^3 \ +4\cdot n^2 \ - \ 2\cdot n}{5\cdot n^5 \ - \ 7\cdot n^3 \ +8} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{2^{k+3}}{3^{k+1}} = ?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{16\cdot n^3 \ +4\cdot n^2 \ - \ 2\cdot n}{5\cdot n^5 \ - \ 7\cdot n^3 \ +8} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\cdot(16\cdot n^{-2}+4\cdot n^{-3}-2\cdot n^{-4})}{n^5\cdot(5-7\cdot n^{-2}+8\cdot n^{-5})} = \lim_{n\to\infty} \frac{16\cdot n^{-2}+4\cdot n^{-3}-2\cdot n^{-4}}{5-7\cdot n^{-2}+8\cdot n^{-5}} = 0.$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k+3}}{3^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{k+5}}{3^{k+3}} = \tfrac{2^5}{3^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \tfrac{32}{27}\tfrac{1}{1-2/3} = \tfrac{32}{9}.$$

[6] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Wochen zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 10$ und $|d| = 2$ (also $d = -2$) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 240$ mit der letzten Zahlung a_{10} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{10}?

(c) Sei $a_1 = 31$ festgelegt. Welchen Wert muß die Anzahl n haben, um das Summenziel $s_n = 240$ genau zu erreichen, wobei *keine negativen Zahlungen* a_i zugelassen sein sollen.

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $240 = 10 \cdot a_1 - \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 2 \Rightarrow 330 = 10 \cdot a_1 \Rightarrow 33 = a_1$.

$a_{10} = 33 - 9 \cdot 2 = 15$.

(c) $240 = n \cdot 31 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-2) = 32 \cdot n - n^2$

$n^2 - 32n + 240 \stackrel{!}{=} 0$, mit den Lösungen $n \in \{16 - 4, 16 + 4\} = \{12, 20\}$.

Wir haben $a_{12} = 31 + 11 \cdot (-2) = 9 > 0$ und $a_{20} = 31 + 19 \cdot (-2) = -7 < 0$.

Also entfällt Lösung $n = 20$, da negative Zahlungen nicht zugelassen sind, d.h. $n = 12$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -15 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $A^T \cdot (B + A)$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $B + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $A^T \cdot (B + A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 13 \\ 4 & 10 & 10 \\ 6 & 5 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) C^{-1} ist nicht definiert, denn die dritte Zeile von C ist zweimal die erste Zeile von C!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	2	4
	Z_2	1	1	2
	Z_3	2	1	1

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	3	1	2
	R_2	1	2	3

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 1)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 16 \\ 9 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 50 \\ 43 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 1) \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 43 \end{pmatrix} = 143$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 20\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $21\%, 10\%, 0\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{4}} \approx 1.11$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $\ln 1.5 \approx 0.44$, $121^2 = 14641$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_4 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^4 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{4}} \approx 1.11 \Leftrightarrow i = 0.11 = 11\%$

(b) $K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.2)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.2)} \approx \frac{0.44}{0.18} = \frac{44}{18}$; $n = \lceil x \rceil = 3$

(c) $K_4 = (1.21 \cdot 1.1 \cdot 1 \cdot 1.1) \cdot 10000 = 121 \cdot 11 \cdot 11 = 121^2 = 14641$

$i_{\text{eff}} = (1.21 \cdot 1.1 \cdot 1 \cdot 1.1)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.1^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$

Aufgabe 7 Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$e^{-0.5\cdot(x-1)^2} \geq e^{-2}$$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
e^{-0.5\cdot(x-1)^2} \geq e^{-2} &\Leftrightarrow -0.5\cdot(x-1)^2 \geq -2 \\
&\Leftrightarrow 0.5\cdot(x-1)^2 \leq 2 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 4 \\
&\Leftrightarrow |x-1| \leq 2 \\
&\Leftrightarrow x-1 \geq -2 \quad \text{und} \quad x-1 \leq 2 \\
&\Leftrightarrow x \geq -1 \quad \text{und} \quad x \geq 3
\end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \text{ und } x \leq 3\} = [-1, 3].$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
2	-1	1	1	0	0	I
2	1	3	0	1	0	II
1	-1	-1	0	0	1	III
1	-1/2	1/2	1/2	0	0	$(1/2) \cdot$ I
2	1	3	0	1	0	II
1	-1	-1	0	0	1	III
1	-1/2	1/2	1/2	0	0	I
0	2	2	-1	1	0	II - 2 $\cdot$ I
0	- 1/2	-3/2	-1/2	0	1	III - I
1	-1/2	1/2	1/2	0	0	I
0	1	1	-1/2	1/2	0	$(1/2) \cdot$ II
0	- 1/2	-3/2	-1/2	0	1	III
1	0	1	1/4	1/4	0	I + $(1/2)\cdot$ II
0	1	1	-1/2	1/2	0	II
0	0	-1	- 3/4	1/4	1	III + 1/2 $\cdot$ II
1	0	1	1/4	1/4	0	I
0	1	1	-1/2	1/2	0	II
0	0	1	3/4	-1/4	-1	$(-1)\cdot$ III
1	0	0	- 1/2	1/2	1	I - III
0	1	0	- 5/4	3/4	1	II - III
0	0	1	3/4	-1/4	-1	III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \\ 3/4 & -1/4 & -1 \end{pmatrix}$$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 & 12 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 48 \\ 1 & 9 & -3 & 7 & 20 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \end{array}$$

[5] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension besitzt Y?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ ist eine Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & = & 8 & + & 2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & 2 & - & \frac{3}{2} \cdot x_4 \\ x_3 & = & 2 & - & \frac{3}{2} \cdot x_4 \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

(b) zu (i):

$A_{2\times 3} \cdot Y_{m\times n} = B_{2\times 3}$, also $m = 3$ und $n = 3$.

zu (ii):

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	b_3	Protokoll
1	2	-1	1	0	2	I
1	5	-4	0	1	-1	II
1	2	-1	1	0	2	I
0	3	- 3	-1	1	- 3	II - I
1	2	- 1	1	0	2	I
0	1	-1	-1/3	1/3	-1	(1/3)·II
1	0	1	5/3	-2/3	4	I - 2· II
0	1	- 1	-1/3	1/3	-1	II

Lösung Y von $A \cdot Y = B$ spaltenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 5/3 - x_3 \\ -1/3 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2/3 - x_3 \\ 1/3 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - x_3 \\ -1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die x_3 in $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ und $\mathbb{L}_3$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} (5/3 - a) & (-2/3 - b) & (4 - c) \\ (-1/3 + a) & (1/3 + b) & (-1 + c) \\ a & b & c \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$