Mathematik für Ökonomen – WS 2014/15 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

17.02.2015, 12:30-14:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 4$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 \cdot x + 2 & \text{für} \quad 0 \leq x < 4 \\ 3 \cdot \beta + 1 & \text{für} \quad x = 4 \\ \frac{\beta}{6} \cdot x \cdot (\alpha + 2) & \text{für} \quad 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 4 : \lim\limits_{x \to 4_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4_-} (x^2 - 2 \cdot x + 2) = 16 - 8 + 2 = 10$

RGW in $x_0 = 4 : \lim\limits_{x \to 4_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4_+} \left(\frac{\beta}{6} \cdot x \cdot (\alpha + 2)\right) = \frac{2 \cdot \beta}{3} \cdot (\alpha + 2)$

f stetig in 4, also $\lim\limits_{x \to 4_-} f(x) = 10 = \lim\limits_{x \to 4_+} f(x) = \frac{2 \cdot \beta}{3} \cdot (\alpha + 2) = f(4) = 3 \cdot \beta + 1$.

Insbesondere $3 \cdot \beta + 1 = 10$, d.h. $\beta = 3$, und damit $2 \cdot (\alpha + 2) = 10$. Daraus ergibt sich insgesamt $\alpha = 3, \beta = 3$.

Gegeben $f(x) = \pi \cdot e^{-x^2/2}$ mit $D(f) = [-1/2, 3/2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -\pi \cdot x \cdot e^{-x^2/2}$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\pi \cdot x \cdot e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$f''(x) = -\pi \cdot e^{-x^2/2} + (-\pi \cdot x) \cdot e^{-x^2/2} \cdot (-x) = \pi \cdot e^{-x^2/2} \cdot \big(x^2 - 1\big).$

$f''(0) = e^0 \cdot (-1) = -1 < 0$

Also ist $x = 0$ eine lokale Maximalstelle mit $f(0) = \pi \cdot e^0 = \pi$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).

Ergebniskontrolle:

$$f''(x) \begin{cases} > 0, \text{ für } x^2 > 1 \text{ und } x \in [-1/2, 3/2] \\ = 0, \text{ für } x^2 = 1 \text{ und } x \in [-1/2, 3/2] \\ < 0, \text{ für } x^2 < 1 \text{ und } x \in [-1/2, 3/2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) \begin{cases} > 0, \text{ für } |x| > 1 \text{ und } x \in [-1/2, 3/2] \\ = 0, \text{ für } |x| = 1 \text{ und } x \in [-1/2, 3/2] \\ < 0, \text{ für } |x| < 1 \text{ und } x \in [-1/2, 3/2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) \begin{cases} > 0, \text{ für } (x < -1 \text{ oder } x > 1) \text{ und } x \in [-1/2, 3/2] \\ = 0, \text{ für } (x = -1 \text{ oder } x = 1) \text{ und } x \in [-1/2, 3/2] \\ < 0, \text{ für } (x > -1 \text{ und } x < 1) \text{ und } x \in [-1/2, 3/2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) \begin{cases} > 0, \quad \text{für } 1 < x \leq 3/2 \\ = 0, \qquad \text{für } x = 1 \\ < 0, \text{ für } -1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Also f konkav über $[-1/2, 1]$ und f konvex über $[1, 3/2]$. Außerdem besitzt f in $x = 1$ eine Wendestelle mit dem Funktionswert $f(1) = \pi \cdot e^{-1/2}$.

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2+x+1)^2 - 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1}{(x+1)^3 - 3\cdot x^2 - 3\cdot x - 1}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+x+1)^2 - 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1}{(x+1)^3 - 3\cdot x^2 - 3\cdot x - 1} &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot(x^2+x+1)\cdot(2\cdot x+1) - 6\cdot x - 2}{3\cdot(x+1)^2 - 6\cdot x - 3} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot(2\cdot x+1)^2 + 4\cdot(x^2+x+1) - 6}{6\cdot(x+1) - 6} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{8\cdot(2\cdot x+1) + 4\cdot(2\cdot x+1)}{6} = \frac{12}{6} = 2.
\end{aligned}$$

[4] Aus einem Sparplan ergibt sich für die Rendite x folgende Bestimmungsgleichung

$$\frac{x^3}{3} + x^2 - 5 \cdot x \stackrel{!}{=} 1$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 3$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).

Ergebniskontrolle:

$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 5 \cdot x - 1;$
$f'(x) = x^2 + 2 \cdot x - 5$

$x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n));$ Startwert $x_0 = 3;$

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0)) = 3 - (f(3)/f'(3)) = 3 - \dfrac{9+9-15-1}{9+6-5} = 3 - \dfrac{2}{10} = 2.8$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.8 - \frac{f(2.8)}{f'(2.8)} = [2.8 - \frac{2.8^3/3+2.8^2-5\cdot2.8-1}{2.8^2+2.8-5} \approx 2.7721]$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{4+e^1} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 2 \cdot e^t & \text{für} \ \ 0 \leq t < 1 \\ t^{-\frac{3}{2}} & \text{für} \ \ 1 \leq t < 4 \\ 1 & \text{für} \ \ 4 \leq t < 4 + e^1 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} \int_0^{4+e^1} f(t)dt &= \int_0^1 2 \cdot e^t \ dt + \int_1^4 t^{-\frac{3}{2}} \ dt + \int_4^{4+e^1} 1 \ dt \\ &= [2 \cdot e^t]_0^1 + \Big[-2 \cdot t^{-\frac{1}{2}}\Big]_1^4 + [t]_4^{4+e^1} \\ &= 2 \cdot e^1 - 2 + (-1 + 2) + (4 + e^1 - 4) = 3 \cdot e^1 - 1 \end{aligned}$$

[4] Für $2 \leq x$ sei $F(x) := F(2) + \int_2^x (t-2) \cdot e^{t+3}\, dt$, wobei $F(2)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(2) = -e^5$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = t - 2$, $g'(t) = e^{t+3}$ ist $f'(t) = 1$ und $g(t) = e^{t+3}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= -e^5 + \int_2^x (t-2) \cdot e^{t+3}\, dt = -e^5 + \left[(t-2) \cdot e^{t+3}\right]_2^x - \int_2^x e^{t+3}\, dt \\ &= -e^5 + (x-2) \cdot e^{x+3} - \left[e^{t+3}\right]_2^x \\ &= -e^5 + (x-2) \cdot e^{x+3} - (e^{x+3} - e^5) = (x-3) \cdot e^{x+3} \end{aligned}$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = \ln(2 \cdot x - 1)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(1.5) = \ln 2$.

Ergebniskontrolle:

$f(1) = 0$; $f'(x) = 2/(2 \cdot x - 1)$; $f'(1) = 2$; $f''(x) = -4/(2 \cdot x - 1)^2$; $f''(1) = -4$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = 2 \cdot (x-1) - 2 \cdot (x-1)^2$ mit $[x_0 = 1]$.

Damit ist $f(1.5) \approx T_2^f(1.5, 1) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = e^{2\cdot x^2+y^2}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = 4 \cdot x \cdot e^{2\cdot x^2+y^2}$

$f''_{xx}(x,y) = 4 \cdot e^{2\cdot x^2+y^2} + 4 \cdot x \cdot e^{2\cdot x^2+y^2} \cdot 4 \cdot x = 4 \cdot e^{2\cdot x^2+y^2}(1 + 4 \cdot x^2)$

$f'_y(x,y) = 2 \cdot y \cdot e^{2\cdot x^2+y^2}$

$f''_{yy}(x,y) = 2 \cdot e^{2\cdot x^2+y^2} + 2 \cdot y \cdot e^{2\cdot x^2+y^2} \cdot 2 \cdot y = 2 \cdot e^{2\cdot x^2+y^2}(1 + 2 \cdot y^2)$

$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 2 \cdot y \cdot e^{2\cdot x^2+y^2} \cdot 4 \cdot x = 8 \cdot x \cdot y \cdot e^{2\cdot x^2+y^2}$

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = 20 \cdot x^{3/4} \cdot y^{1/4}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10000$ und $y_0 = 160000$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um 4% und die y-Variable um -8% verändert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x, y) = 15 \cdot x^{-1/4} \cdot y^{1/4} = 15 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{1/4} \text{ und } f'_y(x, y) = 5 \cdot x^{3/4} \cdot y^{-3/4} = 5 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{3/4}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10000, 160000)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 10000 \cdot \frac{15 \cdot \left(\frac{160000}{10000}\right)^{1/4}}{20 \cdot 10000^{3/4} \cdot 160000^{1/4}} = 10000 \cdot \frac{15 \cdot 2}{20 \cdot 10^3 \cdot 20} = \frac{3}{4},$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 160000 \cdot \frac{5 \cdot \left(\frac{10000}{160000}\right)^{3/4}}{20 \cdot 10000^{3/4} \cdot 160000^{1/4}} = 160000 \cdot \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{20 \cdot 10^3 \cdot 20} = \frac{1}{4}.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{3}{4} \cdot 4\% + \frac{1}{4} \cdot (-8\%) = 1\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(10000, 160000)$ zu $f(10400, 147200)$ beträgt ca. 1%.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + 3\cdot x^2 - 12\cdot y + y^3 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:
$f'_x(x,y) = 3\cdot x^2 + 6\cdot x$
$f'_y(x,y) = -12 + 3\cdot y^2$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 3\cdot x^2 + 6\cdot x & = & 0 \\ -12 + 3\cdot y^2 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 3\cdot x\cdot(x+2) & = & 0 \\ y^2 & = & 4 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclclcl} x & = & 0 & \text{oder} & x & = & -2 \\ y & = & -2 & \text{oder} & y & = & 2 \end{array}\right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (-2,-2), P2 = (-2,2), P3 = (0,-2), P4 = (0,2)$.

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y)\cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0):

$f''_{xx}(x,y) = 6\cdot x + 6$

$f''_{yy}(x,y) = 6\cdot y$

$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$

- $H_D(-2,-2) = (-12+6)\cdot(-12) = 72 > 0$ und $f''_{xx}(-2,-2) = -6 < 0 \Rightarrow (-2,-2)$ ist eine Maximalstelle von f mit Funktionswert $f(-2,-2) = -8 + 3\cdot 4 - 12\cdot(-2) - 8 = 20$.
- $H_D(-2,2) = (-12+6)\cdot 12 = -72 < 0 \Rightarrow (-2,2)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(-2,2) = -8 + 3\cdot 4 - 12\cdot 2 + 8 = -12$.
- $H_D(0,-2) = 6\cdot(-12) = -72 < 0 \Rightarrow (0,-2)$ ist eine Sattelpunktstelle mit Funktionswert $f(0,-2) = -12\cdot(-2) - 8 = 16$.
- $H_D(0,2) = 6\cdot 12 = 72 > 0$ und $f''_{xx}(0,2) = 6 > 0 \Rightarrow (0,2)$ ist eine Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(0,2) = -12\cdot 2 + 8 = -16$.