Mathematik für Ökonomen – WS 2015/16 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 1

16.02.2016, 11:00-13:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y + x \geq 3$

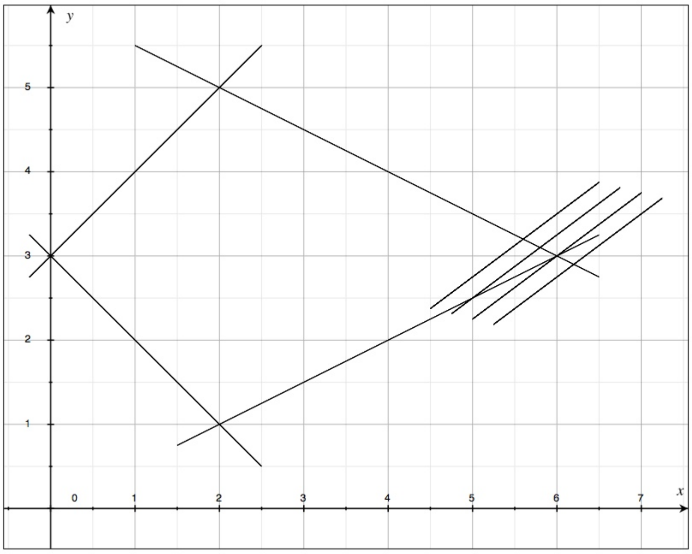
(2) $2 \cdot y + x \leq 12$

(3) $y - x \leq 3$

(4) $2 \cdot y - x \geq 0$

Ergebniskontrolle:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y) : y \geq -x + 3 \text{ und } y \leq -\frac{1}{2} \cdot x + 6 \text{ und } y \leq x + 3 \text{ und } y \geq \frac{1}{2} \cdot x \right\}$$



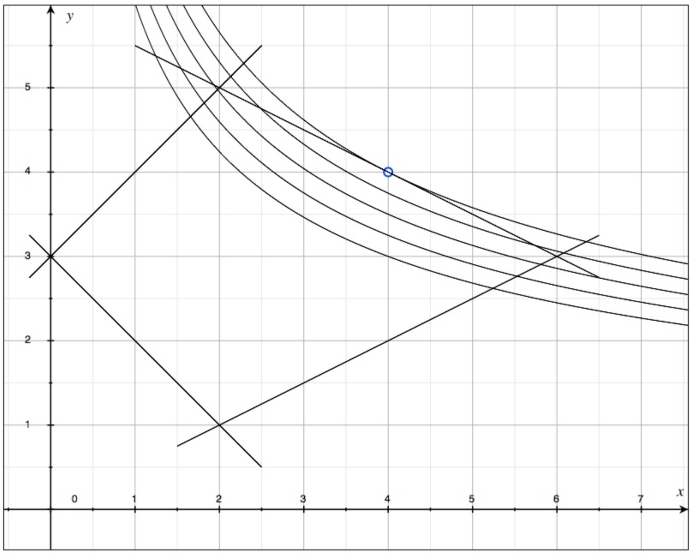
(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = 3 \cdot x - 4 \cdot y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.

Ergebniskontrolle:
Zielgeradenschar: $y = -\frac{1}{4} \cdot z + \frac{3}{4} \cdot x$.
Da $b = -4 < 0$ in $z = a \cdot x + b \cdot y$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach unten. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (2) $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 6$ und (4) $y = \frac{1}{2} \cdot x$. Gleichsetzen von (2) und (4) liefert $-\frac{1}{2} \cdot x + 6 = \frac{1}{2} \cdot x$ und damit $x_0 = 6$. Eingesetzt in (2) oder (4) erhält man $y_0 = 3$. Die Maximalstelle $(x_0 = 6, y_0 = 3)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = 6$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{1}{2}}y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle:
Optisch ergibt sich (2) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im “Innern” des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (2) $y = 6 - \frac{1}{2} \cdot x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot (6 - \frac{1}{2} \cdot x) = 6 \cdot x^{1/2} - \frac{1}{2} \cdot x^{3/2}$.

b) $f'(x) = 3 \cdot x^{-1/2} - \frac{3}{4} \cdot x^{1/2}$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und x auflösen, liefert $x_0 = 4$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = 4$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^{1/2} \cdot y_0 = 4^{1/2} \cdot 4 = 8$.

[4] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot n^{5/3} \; - n^{1/2} \; - \; 1}{n^{5/3} + \; 2 \cdot n^{3/2} \; + 8} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{2^{k+2}}{3^k} = ?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n^{5/3} \; - n^{1/2} \; - \; 1}{n^{5/3} + \; 2 \cdot n^{3/2} \; + 8} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/3} \cdot (3 - n^{-7/6} - n^{-5/3})}{n^{5/3}(1 + 2 \cdot n^{-1/6} + 8 \cdot n^{-5/3})}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - n^{-7/6} - n^{-5/3}}{1 + 2 \cdot n^{-1/6} + 8 \cdot n^{-5/3}} = 3.$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{2^{k+2}}{3^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{2^{k+5}}{3^{k+3}} = \tfrac{2^5}{3^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{3^k} = \tfrac{32}{27} \tfrac{1}{1-2/3} = \tfrac{32}{9}.$$

[6] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Wochen zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 10$ und $|d| = 2$ (also $d = -2$) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 250$ mit der letzten Zahlung a_{10} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{10}?

(c) Sei $a_1 = 75$ und $|d| = 10$ (also $d = -10$) festgelegt. Welchen Wert muß die Anzahl n haben, um das Summenziel $s_n = 300$ genau zu erreichen, wobei *keine negativen Zahlungen* a_i zugelassen sein sollen.

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $250 = 10 \cdot a_1 - \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 2 \Rightarrow 340 = 10 \cdot a_1 \Rightarrow 34 = a_1$.

$a_{10} = 34 - 9 \cdot 2 = 16$.

(c) $300 = n \cdot 75 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-10) = 80 \cdot n - 5 \cdot n^2$

$5 \cdot n^2 - 80 \cdot n + 300 \stackrel{!}{=} 0$, mit den Lösungen $n \in \{8-2, 8+2\} = \{6, 10\}$.

Wir haben $a_6 = 75 + 5 \cdot (-10) = 25 > 0$ und $a_{10} = 75 + 9 \cdot (-10) = -15 < 0$.

Also entfällt Lösung $n = 10$, da negative Zahlungen nicht zugelassen sind, d.h. $n = 6$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert" ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -15 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

(a) $(A \cdot A^T) + B$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$; $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(A \cdot A^T) + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) C^{-1} ist nicht definiert, denn C ist keine quadratische Matrix!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	1	2
	Z_2	2	1	1
	Z_3	4	2	1

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	2	3
	R_2	3	1	2

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 1)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 & 7 \\ 13 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 49 \\ 47 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 1) \cdot \begin{pmatrix} 49 \\ 47 \end{pmatrix} = 145$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $44\%, 20\%, 0\%, 20\%, 20\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{5}} \approx 1.09$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $\ln 1.5 \approx 0.44$, $121^2 = 14641$, $12^5 = 248832$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_5 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{5}} \approx 1.09 \Leftrightarrow i = 0.09 = 9\%$

(b) $K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.05)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.05)} \approx \frac{0.44}{0.05} = \frac{44}{5}$; $n = \lceil x \rceil = 9$

(c) $K_5 = (1.44 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.2) \cdot 100000 = 144 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^5 = 248832$

$i_{\text{eff}} = (1.44 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.2)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(1.2^5\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$e^{-0.5\cdot(x+1)^2+3} \geq e^{-5}$$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
e^{-0.5\cdot(x-1)^2+3} \geq e^{-5} \quad &\Leftrightarrow \quad -0.5\cdot(x+1)^2+3 \geq -5 \\
&\Leftrightarrow \quad -0.5\cdot(x+1)^2 \geq -8 \\
&\Leftrightarrow \quad 0.5\cdot(x+1)^2 \leq 8 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 \leq 16 \\
&\Leftrightarrow \quad |x+1| \leq 4 \\
&\Leftrightarrow \quad x+1 \geq -4 \quad \text{und} \quad x+1 \leq 4 \\
&\Leftrightarrow \quad x \geq -5 \quad \text{und} \quad x \geq 3
\end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -5 \text{ und } x \leq 3\} = [-5, 3].$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
2	1	-1	1	0	0	I
2	3	1	0	1	0	II
1	-1	-1	0	0	1	III
1	1/2	-1/2	1/2	0	0	(1/2) · I
2	3	1	0	1	0	II
1	-1	-1	0	0	1	III
1	1/2	-1/2	1/2	0	0	I
0	2	2	-1	1	0	II - 2 · I
0	- 3/2	-1/2	-1/2	0	1	III - I
1	1/2	-1/2	1/2	0	0	I
0	1	1	-1/2	1/2	0	(1/2) · II
0	- 3/2	-1/2	-1/2	0	1	III
1	0	-1	3/4	-1/4	0	I - (1/2)· II
0	1	1	-1/2	1/2	0	II
0	0	1	- 5/4	3/4	1	III + (3/2) · II
1	0	0	- 1/2	1/2	1	I + III
0	1	0	3/4	-1/4	-1	II - III
0	0	1	-5/4	3/4	1	III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 3/4 & -1/4 & -1 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 4 & 3 & 4 & 5 & 13 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[5] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 9 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus den Rang der Matrix A.

(ii) Welchen Rang besitzt die Matrix A^T? (mit Begründung bitte)

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ ist eine Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \; : \; \begin{array}{lllllll} x_1 & = & 1 & - & x_3 & - & 2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & 3 & & & + & x_4 \\ x_3 & \in & \mathbb{R}, & x_4 & \in & \mathbb{R} & \end{array} \right\}$$

(b) <u>zu (i)</u>:

Der Rang der Matrix A kann aus dem Endtableau des GJ-Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssymstems $Ax = 0$ abgelesen werden.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Protokoll
1	3	-1	1	0	I
4	3	5	4	0	II
1	9	-3	7	0	III
1	3	-1	1	0	I
0	-9	9	0	0	II - 4· I
0	6	-2	6	0	III - I
1	3	- 1	1	0	I
0	1	-1	0	0	$(-1/9)\cdot$II
0	6	-2	6	0	III
1	0	2	1	0	I - 3· II
0	1	-1	0	0	II
0	0	4	6	0	III - 6· II
1	0	2	1	0	I
0	1	-1	0	0	II
0	0	1	3/2	0	1/4·III
1	0	0	-2	0	I - $2 \cdot III$
0	1	0	3/2	0	II + III
0	0	1	3/2	0	III

Also besitzt Matrix A den Rang 3.

<u>zu (ii)</u>:

Jede Matrix besitzt denselben Rang wie ihre Transponierte, also Rang von $A^T = 3$.