Mathematik für Ökonomen – WS 2015/16 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

16.02.2016, 13:30-15:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur <u>und</u> ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[6] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 3$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot e^{(3-x)} & \text{für} \quad 0 \leq x < 3 \\ 3 & \text{für} \quad x = 3 \\ \beta - 4 + (x+\alpha)^2 & \text{für} \quad 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 3 : \lim\limits_{x \to 3_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3_-} \beta \cdot e^{(3-x)} = \beta$

RGW in $x_0 = 3 : \lim\limits_{x \to 3_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3_+} \left(\beta - 4 + (x+\alpha)^2\right) = \beta - 4 + (3+\alpha)^2$

Wegen Stetigkeit von f in $x_0 = 3$ muß gelten

$$3 = f(3) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 3_-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 3_+} f(x).$$

Dies führt zu den Gleichungen

$$3 = \beta \quad \text{und} \quad 3 = \beta - 4 + (3+\alpha)^2,$$

d.h. $\beta = 3$ und $(3+\alpha)^2 = 4$.

Schließlich

$$\begin{aligned} & (3+\alpha)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & 3+\alpha = -2 \quad \text{oder} \quad 3+\alpha = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = -5 \quad \text{oder} \quad \alpha = -1. \end{aligned}$$

Gegeben $f(x) = x \cdot e^{2 \cdot x}$ mit $D(f) = [-4, 0]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^{2 \cdot x} + 2 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x}$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Minimalpunkte (Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2 \cdot x} + 2 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot x + 1) \cdot e^{2 \cdot x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$f''(x) = 2 \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot e^{2 \cdot x} + 4 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} = 4 \cdot e^{2 \cdot x} + 4 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x}$.

$f''(-1/2) = 4 \cdot e^{-1} - 2 \cdot e^{-1} = 2 \cdot e^{-1} > 0$

Also ist $x = -1/2$ einzige lokale Minimalstelle mit $f(-1/2) = -e^{-1}/2$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).

Ergebniskontrolle:

$f''(x) = 4 \cdot e^{2 \cdot x} + 4 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} = 4 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot (x + 1)$. Da e^{-x} immer positiv ist, folgt

$f''(x) \leq 0$ für $x \in [-4, -1]$, d.h. f konkav über $[-4, -1]$,

$f''(x) \geq 0$ für $x \in [-1, 0]$, d.h. f konvex über $[-1, 0]$.

Außerdem gilt $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, d.h. f besitzt in $x = -1$ eine Wendestelle mit dem Funktionswert $f(-1) = -e^{-2}$.

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2\cdot x-1)^3 - 12\cdot x^2 + 18\cdot x - 7}{(x+1)^3 - 6\cdot x^2 - 2}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{(2\cdot x-1)^3 - 12\cdot x^2 + 18\cdot x - 7}{(x+1)^3 - 6\cdot x^2 - 2} &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{6\cdot(2\cdot x-1)^2 - 24\cdot x + 18}{3\cdot(x+1)^2 - 12\cdot x} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{24\cdot(2\cdot x-1) - 24}{6\cdot(x+1) - 12} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{48}{6} = \frac{48}{6} = 8.
\end{aligned}$$

[5] Berechnen Sie das Integral $\int_0^4 f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 2 \cdot t^{3/2} & \text{für } \ 0 \leq t < 1 \\ 1/t & \text{für } \ 1 \leq t < e^1 \\ 2 \cdot e^{-2} \cdot t & \text{für } \ e^1 \leq t \leq 4 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(t)dt &= \int_0^1 2 \cdot t^{3/2}\ dt + \int_1^{e^1} 1/t\ dt + \int_{e^1}^4 2 \cdot e^{-2} \cdot t\ dt \\ &= \left[2 \cdot \frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 + [\ln t]_1^{e^1} + \left[2 \cdot e^{-2} \cdot \frac{t^2}{2}\right]_{e^1}^4 \\ &= [4/5 - 0] + [1 - 0] + \left[16 \cdot e^{-2} - 1\right] \\ &= 4/5 + 1 + 16 \cdot e^{-2} - 1 = 4/5 + 16 \cdot e^{-2} \end{aligned}$$

[4] Für $0 \leq x$ sei $F(x) := F(0) + \int_0^x t \cdot e^{t/2}\ dt$, wobei $F(0)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(0) = -4$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = t$, $g'(t) = e^{t/2}$ ist $f'(t) = 1$ und $g(t) = 2 \cdot e^{t/2}$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= -4 + \int\limits_0^x t \cdot e^{t/2}\ dt \\
&= -4 + \Big[2 \cdot te^{t/2}\Big]_0^x - \int_0^x 2 \cdot e^{t/2}\ dt \\
&= -4 + \Big[2 \cdot x \cdot e^{x/2} - 0\Big] - \Big[4 \cdot e^{t/2}\Big]_0^x \\
&= -4 + 2 \cdot x \cdot e^{x/2} - \Big[4 \cdot e^{x/2} - 4\Big] \\
&= 2 \cdot x \cdot e^{x/2} - 4 \cdot e^{x/2}
\end{aligned}$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = e^{(x+1)^2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = -1$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(0) = e^1$.

Ergebniskontrolle:

$f(-1) = 1$; $f'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot e^{(x+1)^2}$; $f'(-1) = 0$; $f''(x) = 2 \cdot e^{(x+1)^2} + 4 \cdot (x+1)^2 \cdot e^{(x+1)^2}$; $f''(-1) = 2$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = 1 + (x+1)^2$ mit $[x_0 = -1]$.

Damit ist $f(0) \approx T_2^f(0, -1) = 2$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = (x + y) \cdot e^{x \cdot y}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x, y) = e^{x \cdot y} + (x + y) \cdot e^{x \cdot y} \cdot y = e^{x \cdot y} + y \cdot (x + y) \cdot e^{x \cdot y}$

$f''_{xx}(x, y) = y \cdot e^{x \cdot y} + y \cdot e^{x \cdot y} + y^2 \cdot (x + y) \cdot e^{x \cdot y} = 2 \cdot y \cdot e^{x \cdot y} + y^2 \cdot (x + y) \cdot e^{x \cdot y}$

$f'_y(x, y) = e^{x \cdot y} + (x + y) \cdot e^{x+y} \cdot x = e^{x \cdot y} + x \cdot (x + y) \cdot e^{x+y}$

$f''_{yy}(x, y) = x \cdot e^{x \cdot y} + x \cdot e^{x \cdot y} + x^2 \cdot (x + y) \cdot e^{x \cdot y} = 2 \cdot x \cdot e^{x \cdot y} + x^2 \cdot (x + y) \cdot e^{x \cdot y}$

$f''_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y) = x \cdot e^{x \cdot y} + (x + 2 \cdot y) \cdot e^{x \cdot y} + x \cdot y \cdot (x + y) \cdot e^{x \cdot y}$

[6] Betrachten Sie die Nachfragefunktion $f(x, y) = 200 \cdot x^{-2} \cdot y^2$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 2% vermindert und das mittlere Einkommen um 1% erhöht.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x, y) = -400 \cdot x^{-3} \cdot y^2 \text{ und } f'_y(x, y) = 400 \cdot x^{-2} \cdot y^1.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 50)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{-400 \cdot 10^{-3} \cdot 50^2}{200 \cdot 10^{-2} \cdot 50^2} = -20 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-2}} = -2$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{400 \cdot 10^{-2} \cdot 50^1}{200 \cdot 10^{-2} \cdot 50^2} = \frac{100 \cdot 50}{50^2} = 2.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = (-2) \cdot (-2)\% + 2 \cdot 1\% = 6\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(10, 50)$ zu $f(9.8, 50.5)$ beträgt ca. 6%.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2 \cdot x + 4 \cdot y^3 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + 6 \cdot y = 12$.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & + (f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = x + 6 \cdot y - 12 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 2 \cdot x + 4 \cdot y^3 + \lambda \cdot (x + 6 \cdot y - 12)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 2$ und $f'_y(x,y) = 12 \cdot y^2$
  - $b'_x(x,y) = 1$ und $b'_y(x,y) = 6$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 2 + \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 12 \cdot y^2 + 6 \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = x + 6 \cdot y - 12$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 + \lambda & = & 0 \\ 12 \cdot y^2 + 6 \cdot \lambda & = & 0 \\ x + 6 \cdot y - 12 & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -2 \\ 12 \cdot y^2 + 6 \cdot (-2) & = & 0 \\ x & = & 12 - 6 \cdot y \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -2 \\ y^2 & = & 1 \\ x & = & 12 - 6 \cdot y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rclcrcl} \lambda & = & -2 & & & & \\ y & = & -1 & \text{oder} & y & = & 1 \\ x & = & 18 & \text{oder} & x & = & 6 \end{array} \right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (18, -1), P2 = (6, 1)$ mit $\lambda = -2$
- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0:
  - $f''_{yy}(x,y) = 24 \cdot y$
  - $f''_{xx}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = 0$
  - $b''_{xx}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = 0$.
- Berechnung der Werte von (x_0, y_0, λ_0) für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(18, -1, -2) = 0 + (-2) \cdot 0 + (-24) \cdot 1^2 = -24 < 0 \Rightarrow (18, -1)$ ist eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $6 \cdot x + y = 12$ mit Funktionswert $f(18, -1) = 32$.
  - $D_0(6, 1, -2) = 0 + (-2) \cdot 0 + 24 \cdot 1^2 = 24 > 0 \Rightarrow (6, 1)$ ist eine lokale Minimmalstelle von f unter der Nebenbedingung $x + 6 \cdot y = 12$ mit Funktionswert $f(6, 1) = 16$.