Mathematik für Ökonomen – WS 2016/17 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

14.02.2017, 13:00-15:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $x - 3 \cdot y \leq 0$

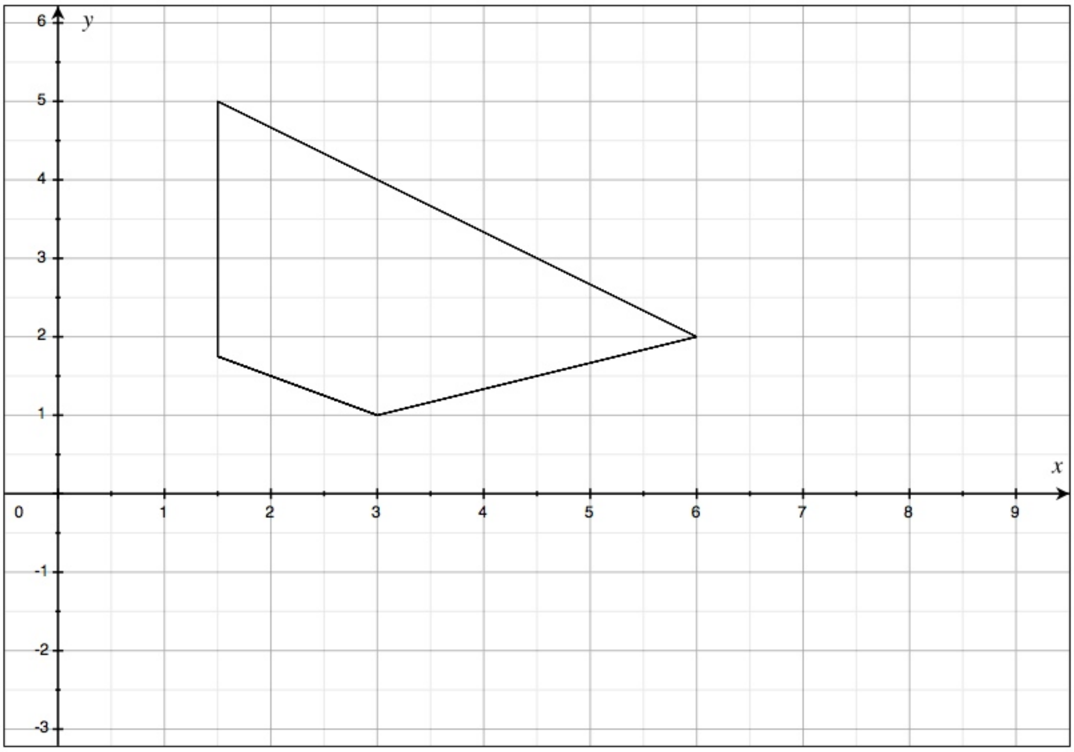
(2) $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$

(3) $2 \cdot x \geq 3$

(4) $4 \cdot y + 2 \cdot x \geq 10$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) : y \geq \frac{1}{3} \cdot x \text{ und } y \leq 6 - \frac{2}{3} \cdot x \text{ und } x \geq \frac{3}{2} \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \right\}$$



[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	6	4	2
	Z_2	4	2	4
	Z_3	8	2	2

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	2	3	1
	R_2	1	3	3

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 18 \\ 42 & 16 & 20 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 130 \\ 152 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 152 \end{pmatrix} = 694$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
3	3	3	3	12
2	3	2	1	5
4	5	4	3	13

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	b^*
1	0	1	2	7
0	1	0	-1	-3
0	0	0	0	0

[4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ sind zwei Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 7 & - & x_3 & - & 2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & -3 & + & x_4 & & \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & & & \end{array} \right\}$$

(b) **Ansatz:** Tabellenform

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	e_4	Protokoll
-1	1	1	0	1	0	0	0	I
1	3	-1	0	0	1	0	0	II
2	2	1	0	0	0	1	0	III
0	0	0	-1/2	0	0	0	1	IV

Lösung: Nach Durchführung des Gauß-Jordan Algorithmus

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -5/12 & -1/12 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 5% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 3\%$ und ein Zielwert K_x, der 5% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 6$ und Zinsstaffel $0\%, 69\%, 0\%, 30\%, 69\%, 30\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_6 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.05^{\frac{1}{3}} \approx 1.02$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $13^6 = 4826809$, $\ln 1.03 \approx 0.03$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_3 = 1.05 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.05)^{\frac{1}{3}} \approx 1.02 \Leftrightarrow i = 0.02 = 2\%$

(b) $K_x = 1.05 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.03)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.05)}{\ln(1.03)} \approx \frac{0.05}{0.03} = \frac{5}{3}$; $n = \lceil x \rceil = 2$

(c) $K_6 = (1 \cdot 1.69 \cdot 1.3 \cdot 1 \cdot 1.69 \cdot 1.3) \cdot 1000000 = 169 \cdot 13 \cdot 169 \cdot 13 = 13^6 = 4826809$

$i_{\text{eff}} = (1 \cdot 1.69 \cdot 1 \cdot 1.3 \cdot 1.69 \cdot 1.3)^{\frac{1}{6}} - 1 = \left(1.3^6\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 1.3 - 1 = 0.3 = 30\%$

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = -1$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2+\ln(2+x)}{x^2-5} & \text{für} \quad -2 < x < -1 \\ 0 & \text{für} \quad x = -1 \\ (2+x)\cdot\ln(1+x^2) & \text{für} \quad -1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 =$ -1 : $\lim\limits_{x\to -1_-} f(x) = \cdots = 0$

RGW in $x_0 =$ -1 : $\lim\limits_{x\to -1_+} f(x) = \cdots \neq 0$

Also gilt LGW $\neq$ RGW, und somit ist f nicht stetig in $x_0 = -1$.

Gegeben $f(x) = 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}$ mit $D(f) = [-3, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -2 \cdot (x+1) \cdot e^{-(x+1)^2/2}$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot (x+1) \cdot e^{-(x+1)^2/2} = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = -1$$

$$f''(x) = \cdots = 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}\big((x+1)^2 - 1\big).$$

$$f''(-1) = -2 \cdot e^{-0} = -2 < 0$$

Also ist $x = -1$ eine lokale Maximalstelle mit $f(-1) = 2 \cdot e^{-0} = 2$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).

Ergebniskontrolle:

Untersuchung auf Vorzeichenbereiche von $f''(x)$. Dazu zunächst Bestimmung der Nullstellen von $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}\big((x+1)^2 - 1\big) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |x+1| = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{oder} \quad x = 0. \end{aligned}$$

3 Möglichkeiten, fortzufahren

<u>1.Möglichkeit (mit dritter Ableitung)</u>:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2} \cdot \Big(-\frac{2 \cdot (x+1)}{2}\Big)\big((x+1)^2 - 1\big) + 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2} \cdot 2 \cdot (x+1) \\ &= 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2} \cdot (x+1)\big(3 - (x+1)^2\big) \end{aligned}$$

$f'''(-2) = -4 \cdot e^{-1/2} < 0$ und $f'''(0) = 4 \cdot e^{-1/2} > 0$
Daher

$f''(x) \geq 0$ für $x \in [-3, -2]$ und $x \in [0, 2]$ d.h. f konvex über $[-3, -2]$ und $[0, 2]$,

$f''(x) \leq 0$ für $x \in [-2, 0]$, d.h. f konkav über $[-2, 0]$.

Außerdem besitzt f in $x = -2$ und $x = 0$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-2) = f(0) = 2 \cdot e^{-1/2}$.

<u>2.Möglichkeit (ohne dritte Ableitung)</u>:

Da die zweite Ableitungsfunktion stetig ist, und f'' nur in $x = -2$ und $x = 0$ Nullstellen besitzt, hat f'' auf $[-3, 2[$, $]-2, 0[$ und $]0, 2]$ jeweils nur 1 Vorzeichen.

$f''(-3) = 6 \cdot e^{-2} > 0$, also $f''(x) \geq 0$ für $x \in [-3, -2]$, d.h. f konvex über $[-3, -2]$.
$f''(-1) = -2 \cdot e^{-0} = -2 < 0$, also $f''(x) \leq 0$ für $x \in [-2, 0]$, d.h. f konkav über $[-2, 0]$.
$f''(1) = 6 \cdot e^{-2} > 0$, also $f''(x) \geq 0$ für $x \in [0, 2]$, d.h. f konvex über $[0, 2]$.

Außerdem besitzt f in $x = -2$ und $x = 0$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-2) = f(0) = 2 \cdot e^{-1/2}$.

3.Möglichkeit (Ausklammern und Umformungen von Ungleichungen):

$$\begin{aligned} & f''(x) > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}\big((x+1)^2 - 1\big) > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+1)^2 - 1 > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & |x+1|^2 > 1 \\ \Leftrightarrow\quad & |x+1| > 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x < -2 \text{ oder } x > 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & f''(x) < 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}\big((x+1)^2 - 1\big) < 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+1)^2 - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow\quad & |x+1|^2 < 1 \\ \Leftrightarrow\quad & |x+1| < 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x > -2 \text{ und } x < 0 \end{aligned}$$

D.h.

$$f''(x) \geq 0 \text{ für } x \in [-3,-2] \text{ oder für } x \in [0,2], \text{ also } f \text{ konvex über } [-3-2] \text{ und } [0,2].$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ für } x \in [-2,0], \text{ also } f \text{ konkav über } [-2,0].$$

Außerdem besitzt f in $x = -2$ und $x = 0$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-2) = f(0) = 2 \cdot e^{-1/2}$.

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_{-3}^{2} f(t)\;dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} e^{3+t} & \text{für } \;-3 \leq t < 0 \\ -e^3 & \text{für } \;0 \leq t < 1 \\ \dfrac{4}{t^2} & \text{für } \;1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{2} f(t)dt &= \int_{-3}^{0} e^{3+t}\;dt + \int_{0}^{1} (-e^3)\;dt + \int_{1}^{2} \frac{4}{t^2}\;dt \\ &= \cdots = \left[e^{3+t}\right]_{-3}^{0} + \left[-e^3 \cdot t\right]_{0}^{1} + 4 \cdot \left[-t^{-1}\right]_{1}^{2} = \cdots = 1 \end{aligned}$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x t^{-2} \cdot \ln t \; dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = -1$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = \ln t$, $g'(t) = t^{-2}$ ist $f'(t) = t^{-1}$ und $g(t) = -t^{-1}$.

$$F(x) = -1 + \int\limits_1^x t^{-2} \cdot \ln t \; dt$$

$$= -1 + \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x (-t^{-1}) \cdot t^{-1} \; dt = \cdots = -\frac{\ln x + 1}{x}$$

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = e^{0.005 \cdot x \cdot y}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 20$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Transportkostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% erhöht und die Transportkosten um 8% vermindern.

Ergebniskontrolle:

(a) An der Basisstelle $(x_0, y_0) = (20, 50)$ gilt

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 20 \cdot \frac{e^{0.005 \cdot 20 \cdot 50} \cdot 0.005 \cdot 50}{e^{0.005 \cdot 20 \cdot 50}} = \cdots = 5$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{e^{0.005 \cdot 20 \cdot 50} \cdot 0.005 \cdot 20}{e^{0.005 \cdot 20 \cdot 50}} = \cdots = 5$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 5 \cdot 2\% + 5 \cdot (-8)\% = -30\%$

d.h. eine 2% Erhöhung des Rohstoffpreises bei gleichzeitiger 8% Verminderung der Transportkosten führt zu einer ungefähr 30% Verminderung der Herstellungskosten.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 8 \cdot x + 12 \cdot y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y^3 = 10$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y^3 - 10 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 8 \cdot x + 12 \cdot y + \lambda \cdot (4 \cdot x + 2 \cdot y^3 - 10)$
- Bestimmung der bedingt stationären Punkte:
  Gesucht Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} L'_x(x,y,\lambda) &= 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) &= 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

  Als bedingt stationäre Punkte erhält man: $P1 = (2,1), P2 = (3,-1)$ mit $\lambda = -2$
- Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden bedingt stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(2,1,-2) = \cdots = -24 \cdot 16 < 0 \Rightarrow (2,1)$ ist eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y^3 = 10$ mit Funktionswert $f(2,1) = 28$.
  - $D_0(3,-1,-2) = \cdots = 24 \cdot 16 > 0 \Rightarrow (3,-1)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y^3 = 10$ mit Funktionswert $f(3,-1) = 12$.