Mathematik für Ökonomen – WS 2016/17 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 1

14.02.2017, 13:00-15:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $x \quad - \quad 3 \cdot y \quad \leq \quad 0$

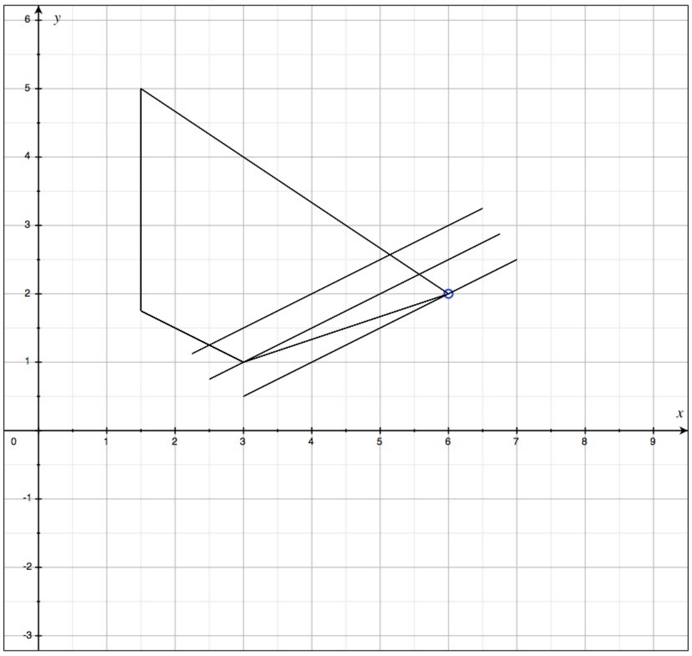
(2) $3 \cdot y \ + \ 2 \cdot x \leq \quad 18$

(3) $2 \cdot x \ \geq \ \ 3$

(4) $4 \cdot y + 2 \cdot x \geq 10$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) : y \geq \frac{1}{3} \cdot x \text{ und } y \leq 6 - \frac{2}{3} \cdot x \text{ und } x \geq \frac{3}{2} \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \right\}$$



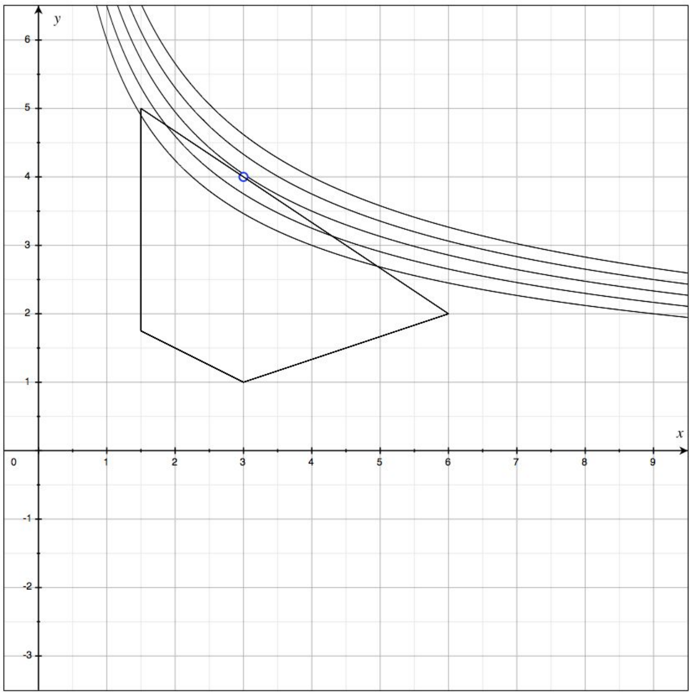
[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x - 2y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Ergebniskontrolle:

Zielgeradenschar: $y = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x$, z variabel.
Da $b = -2 < 0$ in $z = ax + by$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach unten. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Beschränkungsgeraden (1) $y = \frac{1}{3}\ x$ und (2) $y = 6 - \frac{2}{3}\ x$. Damit ergibt sich x_0 durch Auflösungen der Gleichung $\frac{1}{3}x = 6 - \frac{2}{3}x$. Also $x_0 = 6$. Einsetzen in (1) oder (2) liefert $y_0 = 2$. Die Maximalstelle $(x_0 = 6, y_0 = 2)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = 2$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{1}{2}}y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



Ergebniskontrolle:

Optisch ergibt sich (2) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im “Innern” des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (2) $y = 6 - \frac{2}{3}x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{1/2} \cdot (6 - \frac{2}{3}x) = 6x^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2}$.

b) $f'(x) = 3x^{-1/2} - x^{1/2}$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und x auflösen, liefert $x_0 = 3$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = 4$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^{1/2} \cdot y_0 = (3)^{1/2} \cdot 4$.

[4] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot n^4 \;-\; 7\cdot n^3 \;+1}{6\cdot n^5 \;+4\cdot n^2 \;-\; 17\cdot n} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=4}^{n} \dfrac{3^{k-4}}{4^{k-3}} = ?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot n^4 \;-\; 7\cdot n^3 \;+1}{6\cdot n^5 \;+4\cdot n^2 \;-\; 17\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\cdot(3\cdot n^{-1} - 7\cdot n^{-2} + n^{-5})}{n^5\cdot(6+4\cdot n^{-3} - 17\cdot n^{-4})}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot n^{-1} - 7\cdot n^{-2} + n^{-5}}{6+4\cdot n^{-3} - 17\cdot n^{-4}} = \tfrac{0}{6} = 0.$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=4}^{n} \frac{3^{k-4}}{4^{k-3}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-4} \frac{3^k}{4^{k+1}} = \tfrac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} = \tfrac{1}{4}\cdot \tfrac{1}{1-3/4} = 1.$$

[6] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Wochen zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n basierend auf d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 10$ und $|d| = 8$ (also $d = -8$) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 400$ mit der letzten Zahlung a_{10} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{10}?

(c) Seien $a_1 = 60$ und $|d| = 8$ (also $d = -8$) festgelegt. Welchen Wert muss die Anzahl n haben, um das Summenziel $s_n = 240$ genau zu erreichen, wobei *keine negativen Zahlungen* a_i zugelassen sein sollen.

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $400 = 10 \cdot a_1 - \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 8 \Rightarrow 760 = 10 \cdot a_1 \Rightarrow 76 = a_1$.

$a_{10} = 76 - 9 \cdot 8 = 4$.

(c) $240 = n \cdot 60 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-8) = 64 \cdot n - 4 \cdot n^2$

$n^2 - 16 \cdot n + 60 \overset{!}{=} 0$, mit den Lösungen $n \in \{8-2, 8+2\} = \{6, 10\}$.

Wir haben $a_6 = 60 + 5 \cdot (-8) = 20 > 0$ und $a_{10} = 60 + 9 \cdot (-8) = -12 < 0$.

Also entfällt Lösung $n = 10$, da negative Zahlungen nicht zugelassen sind, d.h. $n = 6$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

(a) $(C^T \cdot A) + B$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $C^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2}$; $C^T \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 20 & 4 & 12 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(C^T \cdot A) + B = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 21 & 4 & 12 \\ 13 & 10 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$.

(b) C^{-1} ist nicht definiert, denn C ist keine quadratische Matrix!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	6	4	2
	Z_2	4	2	4
	Z_3	8	2	2

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	2	3	1
	R_2	1	3	3

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 18 \\ 42 & 16 & 20 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 130 \\ 152 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 152 \end{pmatrix} = 694$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 5% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 3\%$ und ein Zielwert K_x, der 5% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 6$ und Zinsstaffel $0\%, 69\%, 0\%, 30\%, 69\%, 30\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_6 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.05^{\frac{1}{3}} \approx 1.02$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $13^6 = 4826809$, $\ln 1.03 \approx 0.03$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_3 = 1.05 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.05)^{\frac{1}{3}} \approx 1.02 \Leftrightarrow i = 0.02 = 2\%$

(b) $K_x = 1.05 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.03)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.05)}{\ln(1.03)} \approx \frac{0.05}{0.03} = \frac{5}{3}$; $n = \lceil x \rceil = 2$

(c) $K_6 = (1 \cdot 1.69 \cdot 1.3 \cdot 1 \cdot 1.69 \cdot 1.3) \cdot 1000000 = 169 \cdot 13 \cdot 169 \cdot 13 = 13^6 = 4826809$

$i_{\text{eff}} = (1 \cdot 1.69 \cdot 1 \cdot 1.3 \cdot 1.69 \cdot 1.3)^{\frac{1}{6}} - 1 = \left(1.3^6\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 1.3 - 1 = 0.3 = 30\%$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$\frac{2 \cdot x^4 + (x-2)^2}{2 \cdot x^4 + 25} \geq 1$$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\frac{2 \cdot x^4 + (x-2)^2}{2 \cdot x^4 + 25} \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 \cdot x^4 + (x-2)^2 \geq 2 \cdot x^4 + 25 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 \geq 25 \\
&\Leftrightarrow \quad |x-2| \geq 5 \\
&\Leftrightarrow \quad x-2 \leq -5 \quad \text{oder} \quad x-2 \geq 5 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leq -3 \quad \text{oder} \quad x \geq 7
\end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3 \text{ oder } x \geq 7\} \; = \,]-\infty, -3] \cup [7, \infty[.$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	e_4	Protokoll
-1	1	1	0	1	0	0	0	I
1	3	-1	0	0	1	0	0	II
2	2	1	0	0	0	1	0	III
0	0	0	-1/2	0	0	0	1	IV
1	-1	-1	0	-1	0	0	0	$(-1)\cdot$ I
1	3	-1	0	0	1	0	0	II
2	2	1	0	0	0	1	0	III
0	0	0	-1/2	0	0	0	1	IV
1	-1	-1	0	- 1	0	0	0	I
0	4	0	0	1	1	0	0	II - I
0	4	3	0	2	0	1	0	III - 2$\cdot$ I
0	0	0	-1/2	0	0	0	1	IV
1	-1	-1	0	-1	0	0	0	I
0	1	0	0	1/4	1/4	0	0	(1/4) $\cdot$ II
0	4	3	0	2	0	1	0	III
0	0	0	-1/2	0	0	0	1	IV
1	0	-1	0	-3/4	1/4	0	0	I + II
0	1	0	0	1/4	1/4	0	0	II
0	0	3	0	1	- 1	1	0	III - 4 $\cdot$ II
0	0	0	-1/2	0	0	0	1	IV
1	0	-1	0	-3/4	1/4	0	0	I
0	1	0	0	1/4	1/4	0	0	II
0	0	1	0	1/3	-1/3	1/3	0	(1/3)$\cdot$ III
0	0	0	-1/2	0	0	0	1	IV
1	0	0	0	-5/12	-1/12	1/3	0	I + III
0	1	0	0	1/4	1/4	0	0	II
0	0	1	0	1/3	-1/3	1/3	0	III
0	0	0	-1/2	0	0	0	1	IV
1	0	0	0	-5/12	-1/12	1/3	0	I
0	1	0	0	1/4	1/4	0	0	II
0	0	1	0	1/3	-1/3	1/3	0	III
0	0	0	1	0	0	0	-2	$(-2)\ \cdot IV$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -5/12 & -1/12 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 13 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[5] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 10 & 8 & 6 \\ 8 & 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus den Rang der Matrix A.

(ii) Welchen Rang besitzt die Matrix $E_{3\times3} \cdot A \cdot E_{4\times4}$? (mit Begründung bitte)

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ sind zwei Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;:\; \begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 7 & - & x_3 & - & 2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & -3 & + & x_4 & & \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & & & \end{array} \right\}$$

(b) zu (i):

Der Rang der Matrix A kann aus dem Endtableau des GJ-Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ abgelesen werden.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Protokoll
1	1	1	1	0	I
8	10	8	6	0	II
8	12	8	4	0	III
1	1	1	1	0	I
0	2	0	-2	0	II - 8· I
0	4	0	- 4	0	III - 8· I
1	1	1	1	0	I
0	1	0	-1	0	(1/2)·II
0	4	0	-4	0	III
1	0	1	2	0	I - II
0	1	0	-1	0	II
0	0	0	0	0	III - 4· II

Also besitzt Matrix A den Rang 2.

zu (ii):

$E_{3\times3} \cdot A \cdot E_{4\times4} = (E_{3\times3} \cdot A) \cdot E_{4\times4} = A \cdot E_{4\times4} = A$. Daher besitzt die Matrix $E_{3\times3} \cdot A \cdot E_{4\times4}$ denselben Rang wie die Matrix A, d.h. sie besitzt nach (i) den Rang 2.