Mathematik für Ökonomen – WS 2016/17 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

14.02.2017, 13:00-15:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[6] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = -1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+\beta)^2+\ln(2+x)}{5-x^2} & \text{für} \quad -2 < x < -1 \\ \alpha & \text{für} \quad x = -1 \\ (2+x)\cdot\ln(e-1+x^2) & \text{für} \quad -1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in x_0 = -1 : $\lim\limits_{x\to-1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1_-} \frac{(x+\beta)^2+\ln(2+x)}{5-x^2} = \frac{(\beta-1)^2}{4}$

RGW in x_0 = -1 : $\lim\limits_{x\to-1_+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1_+} (2+x)\cdot\ln(e-1+x^2) = 1\cdot\ln e = 1$

Wegen Stetigkeit von f in $x_0 = -1$ muß gelten

$$\alpha = f(-1) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to-1_-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to-1_+} f(x).$$

Dies führt zu den Gleichungen

$$\alpha = 1 \quad \text{und} \quad 4 = (\beta-1)^2.$$

Schließlich

$$\begin{aligned} & (\beta-1)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & \beta - 1 = -2 \quad \text{oder} \quad \beta - 1 = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \beta = -1 \quad \text{oder} \quad \beta = 3 \end{aligned}$$

Also für $\alpha = 1, \beta = -1$ und für $\alpha = 1, \beta = 3$ ist f an der Nahtstelle $x_0 = -1$ stetig.

Gegeben $f(x) = 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}$ mit $D(f) = [-3, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -2 \cdot (x+1) \cdot e^{-(x+1)^2/2}$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot (x+1) \cdot e^{-(x+1)^2/2} = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f''(x) = -2 \cdot e^{-(x+1)^2/2} - 2 \cdot (x+1) \cdot e^{-(x+1)^2/2} \cdot (-\frac{2\cdot(x+1)}{2}) = 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}\big((x+1)^2 - 1\big).$

$f''(-1) = -2 \cdot e^{-0} = -2 < 0$

Also ist $x = -1$ eine lokale Maximalstelle mit $f(-1) = 2 \cdot e^{-0} = 2$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).

Ergebniskontrolle:

Untersuchung auf Vorzeichenbereiche von $f''(x)$. Dazu zunächst Bestimmung der Nullstellen von $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}\big((x+1)^2 - 1\big) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad |x+1| = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{oder} \quad x = 0. \end{aligned}$$

3 Möglichkeiten, fortzufahren

1.Möglichkeit (mit dritter Ableitung):

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2} \cdot (-\frac{2\cdot(x+1)}{2})\big((x+1)^2 - 1\big) + 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2} \cdot 2 \cdot (x+1) \\ &= 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2} \cdot (x+1) \cdot \big(3 - (x+1)^2\big) \end{aligned}$$

$f'''(-2) = -4 \cdot e^{-1/2} < 0$ und $f'''(0) = 4 \cdot e^{-1/2} > 0$
Daher

$f''(x) \geq 0$ für $x \in [-3, -2]$ und $x \in [0, 2]$ d.h. f konvex über $[-3, -2]$ und $[0, 2]$,

$f''(x) \leq 0$ für $x \in [-2, 0]$, d.h. f konkav über $[-2, 0]$.

Außerdem besitzt f in $x = -2$ und $x = 0$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-2) = f(0) = 2 \cdot e^{-1/2}$.

2.Möglichkeit (ohne dritte Ableitung):

Da die zweite Ableitungsfunktion stetig ist, und f'' nur in $x = -2$ und $x = 0$ Nullstellen besitzt, hat f'' auf $[-3, 2[$, $]-2, 0[$ und $]0, 2]$ jeweils nur 1 Vorzeichen.

$f''(-3) = 6 \cdot e^{-2} > 0,$ also $f''(x) \geq 0$ für $x \in [-3, -2],$ d.h. f konvex über $[-3, -2]$.
$f''(-1) = -2 \cdot e^{-0} = -2 < 0,$ also $f''(x) \leq 0$ für $x \in [-2, 0],$ d.h. f konkav über $[-2, 0]$.
$f''(1) = 6 \cdot e^{-2} > 0,$ also $f''(x) \geq 0$ für $x \in [0, 2],$ d.h. f konvex über $[0, 2]$.

Außerdem besitzt f in $x = -2$ und $x = 0$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-2) = f(0) = 2 \cdot e^{-1/2}$.

3.Möglichkeit (Ausklammern und Umformungen von Ungleichungen):

$$
\begin{array}{rlcrl}
& f''(x) > 0 & \qquad & & f''(x) < 0 \\
\Leftrightarrow & 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}\big((x+1)^2 - 1\big) > 0 & & \Leftrightarrow & 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}\big((x+1)^2 - 1\big) < 0 \\
\Leftrightarrow & (x+1)^2 - 1 > 0 & & \Leftrightarrow & (x+1)^2 - 1 < 0 \\
\Leftrightarrow & |x+1|^2 > 1 & & \Leftrightarrow & |x+1|^2 < 1 \\
\Leftrightarrow & |x+1| > 1 & & \Leftrightarrow & |x+1| < 1 \\
\Leftrightarrow & x < -2 \text{ oder } x > 0 & & \Leftrightarrow & x > -2 \text{ und } x < 0
\end{array}
$$

D.h.

$$f''(x) \geq 0 \text{ für } x \in [-3,-2] \text{ oder für } x \in [0,2], \text{ also } f \text{ konvex über } [-3-2] \text{ und } [0,2].$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ für } x \in [-2,0], \text{ also } f \text{ konkav über } [-2,0].$$

Außerdem besitzt f in $x = -2$ und $x = 0$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-2) = f(0) = 2 \cdot e^{-1/2}$.

[5] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-1}{2\cdot e^x + x^3 - x^2 - 2\cdot x - 2}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{2\cdot e^x + x^3 - x^2 - 2\cdot x - 2} &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot x^2\cdot e^{x^3}}{2\cdot e^x + 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 2} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6\cdot x\cdot e^{x^3} + 9\cdot x^4\cdot e^{x^3}}{2\cdot e^x + 6\cdot x - 2} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6\cdot e^{x^3} + 18\cdot x^3\cdot e^{x^3} + 36\cdot x^3\cdot e^{x^3} + 27\cdot x^6\cdot e^{x^3}}{2\cdot e^x + 6} \\
&= \frac{6\cdot e^0 + 0 + 0 + 0}{2\cdot e^0 + 6} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

[5] Berechnen Sie das Integral $\int_{-3}^{2\cdot e^1} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} e^{3+t} & \text{für } -3 \leq t < 0 \\ -3 \cdot t^2 & \text{für } 0 \leq t < e^1 \\ \dfrac{e^1}{t^2} & \text{für } e^1 \leq t \leq 2 \cdot e^1 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
& \int_{-3}^{2\cdot e^1} f(t) dt \\
= & \int_{-3}^{0} e^{3+t}\ dt + \int_{0}^{e^1} (-3 \cdot t^2)\ dt + \int_{e^1}^{2\cdot e^1} \frac{e^1}{t^2}\ dt \\
= & \int_{-3}^{0} e^{3+t}\ dt - 3 \cdot \int_{0}^{e^1} t^2\ dt + \int_{e^1}^{2\cdot e^1} e^1 \cdot t^{-2}\ dt \\
= & \left[e^{3+t}\right]_{-3}^{0} - 3 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot t^3\right]_{0}^{e^1} + \left[-e^1 \cdot t^{-1}\right]_{e^1}^{2\cdot e^1} \\
= & \left[e^3 - e^0\right] - 3 \cdot \left[\frac{e^3}{3} - 0\right] + \left[-\frac{1}{2} + 1\right] \\
= & e^3 - 1 - e^3 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x t^{-2} \cdot \ln t \, dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = -1$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = \ln t$, $g'(t) = t^{-2}$ ist $f'(t) = t^{-1}$ und $g(t) = -t^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= -1 + \int\limits_1^x t^{-2} \cdot \ln t \, dt \\
&= -1 + \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x - \int_1^x (-t^{-1}) \cdot t^{-1} \, dt \\
&= -1 + \left[-\frac{\ln x}{x} + 0 \right] + \int_1^x t^{-2} \, dt \\
&= -1 - \frac{\ln x}{x} + \left[-t^{-1} \right]_1^x \\
&= -1 - \frac{\ln x}{x} + \left[-\frac{1}{x} + 1 \right] \\
&= -\frac{\ln x + 1}{x}
\end{aligned}
$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(1) = \ln 2$.

Ergebniskontrolle:

$f(0) = 0$; $f'(x) = \dfrac{2 \cdot x}{x^2 + 1}$; $f'(0) = 0$; $f''(x) = \dfrac{2 \cdot (x^2 + 1) - 4 \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2 - 2 \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2}$; $f''(0) = 2$;

$T_2^f(x; 0) := f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x - 0)^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - 0)^2 = x^2$.

Damit ist $f(1) \approx T_2^f(1, 0) = 1$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = (1+x^2)^4 \cdot (1-y)^3$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = 4 \cdot (1+x^2)^3 \cdot 2 \cdot x \cdot (1-y)^3 = 8 \cdot x \cdot (1+x^2)^3 \cdot (1-y)^3$$

$$f''_{xx}(x,y) = \big(8 \cdot (1+x^2)^3 + 8 \cdot x \cdot 3 \cdot (1+x^2)^2 \cdot 2x\big) \cdot (1-y)^3 = \big(8 \cdot (1+x^2)^3 + 48 \cdot x^2 \cdot (1+x^2)^2\big) \cdot (1-y)^3$$

$$f'_y(x,y) = (1+x^2)^4 \cdot 3 \cdot (1-y)^2 \cdot (-1) = -3 \cdot (1+x^2)^4 \cdot (1-y)^2$$

$$f''_{yy}(x,y) = -3 \cdot (1+x^2)^4 \cdot 2 \cdot (1-y) \cdot (-1) = 6 \cdot (1+x^2)^4 \cdot (1-y)$$

$$f''_{xy}(x,y) = f'_{yx}(x,y) = -3 \cdot 4 \cdot (1+x^2)^3 \cdot 2 \cdot x \cdot (1-y)^2 = -24 \cdot x \cdot (1+x^2)^3 \cdot (1-y)^2$$

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = e^{0.005 \cdot x \cdot y}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 20$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Transportkostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% erhöht und die Transportkosten um 8% vermindern.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(20,50) = 20 \cdot \frac{f_x'(20,50)}{f(20,50)}$ und $\mathcal{E}_y^f(20,50) = 50 \cdot \frac{f_y'(20,50)}{f(20,50)}$ mit

$$f_x'(x,y) = e^{0.005 \cdot x \cdot y} \cdot 0.005 \cdot y \text{ und } f_y'(x,y) = e^{0.005 \cdot x \cdot y} \cdot 0.005 \cdot x.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (20, 50)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 20 \cdot \frac{e^{0.005 \cdot 20 \cdot 50} \cdot 0.005 \cdot 50}{e^{0.005 \cdot 20 \cdot 50}} = 20 \cdot 0.005 \cdot 50 = 5$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{e^{0.005 \cdot 20 \cdot 50} \cdot 0.005 \cdot 20}{e^{0.005 \cdot 20 \cdot 50}} = 50 \cdot 0.005 \cdot 20 = 5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 5 \cdot 2\% + 5 \cdot (-8)\% = -30\%$

d.h. eine 2% Erhöhung des Rohstoffpreises bei gleichzeitiger 8% Verminderung der Transportkosten führt zu einer ungefähr 30% Verminderung der Herstellungskosten.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 8 \cdot x + 12 \cdot y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y^3 = 10$.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & + (f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y^3 - 10 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 8 \cdot x + 12 \cdot y + \lambda \cdot (4 \cdot x + 2 \cdot y^3 - 10)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 8$ und $f'_y(x,y) = 12$
  - $b'_x(x,y) = 4$ und $b'_y(x,y) = 6y^2$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 8 + 4 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 12 + 6 \cdot \lambda \cdot y^2$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y^3 - 10$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 8 + 4 \cdot \lambda & = & 0 \\ 12 + 6 \cdot \lambda \cdot y^2 & = & 0 \\ 4 \cdot x + 2 \cdot y^3 - 10 & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -2 \\ 12 + 6 \cdot (-2) \cdot y^2 & = & 0 \\ x & = & \frac{10 - 2 \cdot y^3}{4} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -2 \\ y^2 & = & 1 \\ x & = & \frac{10 - 2 \cdot y^3}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -2 \\ y & = & -1 \quad \text{oder} \quad y = 1 \\ x & = & \frac{10 - 2 \cdot y^3}{4} \end{array} \right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (2,1), P2 = (3,-1)$ mit $\lambda = -2$

- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0:
  - $f''_{xx}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = 0$
  - $b''_{yy}(x,y) = 12 \cdot y$
  - $b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{xx}(x,y) = 0.$
- Berechnung der Werte von (x_0, y_0, λ_0) für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(2,1,-2) = 0 - 2 \cdot 0 + (0 - 24) \cdot 4^2 = -24 \cdot 16 < 0 \Rightarrow (2,1)$ ist eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y^3 = 10$ mit Funktionswert $f(2,1) = 28$.
  - $D_0(3,-1,-2) = 0 - 2 \cdot 0 + (0 + 24) \cdot 4^2 = 24 \cdot 16 > 0 \Rightarrow (3,-1)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y^3 = 10$ mit Funktionswert $f(3,-1) = 12$.