

Mathematik für Ökonomen – WS 2017/18 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

06.02.2018, 09:30-11:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum _____

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift _____

Einträge der Klausuraufsicht:

Unterbrechungen

Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Aufgabe 1

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

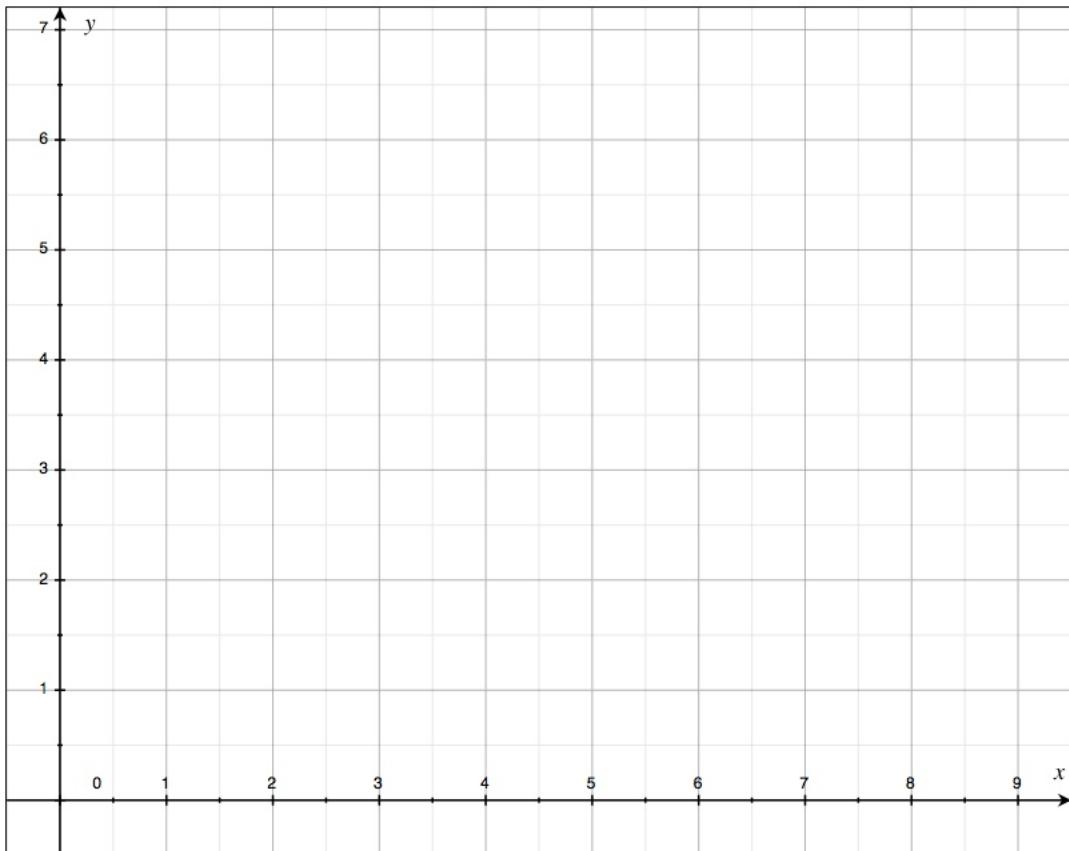
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

$$(1) \quad -2 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot x \leq -\frac{1}{2}$$

$$(2) \quad y + x \leq 9$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x \leq \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{4} \cdot x \geq \frac{5}{4}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Aufgabe 2

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte					Zwischenprodukte		
		E_1	E_2	E_3			Z_1	Z_2	Z_3
Zwischenprodukte	Z_1	4	6	2	Rohstoffe	R_1	1	3	2
	Z_2	2	4	2		R_2	3	2	3
	Z_3	2	8	4					

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

- (a) Berechnen Sie M_{RE} , die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Aufgabe 3

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & 4 \end{array} \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

- [4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte). Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 10$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_{10} um 150% über dem Anfangswert K_0 liegt?
- [2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x , der 150% über dem Anfangswert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n -ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel 0%, 40%, 96%, 40%. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff} .

Hilfswerte: $2.5^{\frac{1}{10}} \approx 1.1$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $196^2 = 38416$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Aufgabe 5

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = 2$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x^2} - 1 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 15 & \text{für } x = 2 \\ \ln(2 \cdot x - 3) + 4 \cdot x^2 - 1 & \text{für } 2 < x \leq 10 \end{cases}$$

Aufgabe 6

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Gegeben $f(x) = e^{x-1} \cdot (x^2 - 3)$ mit $D(f) = [-\sqrt{3}, 3]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
 f hat die Ableitung $f'(x) = e^{x-1} \cdot (x^2 + 2 \cdot x - 3)$.

- [3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.
- [3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Aufgabe 7

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(t) dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 4 \cdot e^{2 \cdot t} & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 4 \cdot t^3 + 3 & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

Aufgabe 8

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [4] Für $1/3 \leq x$ sei $F(x) := F(1/3) + \int_{1/3}^x t^{-2} \cdot \ln(3 \cdot t) dt$, wobei $F(1/3)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1/3) = -3$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Aufgabe 9

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = e^{0.005 \cdot x^2 + 0.001 \cdot x \cdot y}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität \mathcal{E}_x^f und die Transportkostenelastizität \mathcal{E}_y^f an der obigen Basisstelle.
- (b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% vermindert und die Transportkosten um 10% erhöhen.

Aufgabe 10

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = 9 \cdot x + y^3 + 15 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + 3 \cdot y = 6$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x, y, \lambda) \\ := & (f''_{xx}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x, y)) \cdot (b'_y(x, y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x, y)) \cdot b'_x(x, y) \cdot b'_y(x, y) \\ & + (f''_{yy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x, y)) \cdot (b'_x(x, y))^2 \end{aligned}$$