Mathematik für Ökonomen – WS 2017/18 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

06.02.2018, 09:30-11:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[6] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 2$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x/2} & \text{für} \quad 1 < x \leq 2 \\ \beta & \text{für} \quad x = 2 \\ 2 \cdot e^{(x+\alpha)^2-1} & \text{für} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 2: \lim\limits_{x \to 2_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2_-} 2^{x/2} = 2^1 = 2$

RGW in $x_0 = 2: \lim\limits_{x \to 2_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2_+} 2 \cdot e^{(x+\alpha)^2-1} = 2 \cdot e^{(2+\alpha)^2-1}$

Wegen Stetigkeit von f in $x_0 = 2$ muß gelten

$$\beta = f(2) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 2_-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 2_+} f(x).$$

Dies führt zu den Gleichungen

$$2 \cdot e^{(2+\alpha)^2-1} = \beta \quad \text{und} \quad \beta = 2.$$

Schließlich

$$\begin{aligned} 2 \cdot e^{(2+\alpha)^2-1} = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{(2+\alpha)^2-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (2+\alpha)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2+\alpha)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2+\alpha = -1 \quad \text{oder} \quad 2+\alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = -3 \quad \text{oder} \quad \alpha = -1 \end{aligned}$$

Also für $\alpha = -3, \beta = 2$ und für $\alpha = -1, \beta = 2$ ist f an der Nahtstelle $x_0 = 2$ stetig.

Gegeben $f(x) = e^{(\sqrt{3}-x)} \cdot (-x^2 - 2 \cdot x + 1)$ mit $D(f) = [-1.5, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^{(\sqrt{3}-x)} \cdot (x^2 - 3)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{(\sqrt{3}-x)} \cdot (x^2 - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ oder } x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Nach Hinweis $-\sqrt{3} < -1.5$ und $1.7 < \sqrt{3} < 2$, d.h. $-\sqrt{3} \notin D(f)$, $\sqrt{3} \in D(f)$, also $x = \sqrt{3}$ einzige stationäre Stelle

$f''(x) = e^{(\sqrt{3}-x)} \cdot (-x^2 + 2 \cdot x + 3)$.
$f''(\sqrt{3}) = e^0 \cdot (-3 + 2 \cdot \sqrt{3} + 3) = 2 \cdot \sqrt{3} > 0$

Also ist $x = \sqrt{3}$ eine lokale Minimalstelle mit $f(\sqrt{3}) = e^0 \cdot (-3 - 2 \cdot \sqrt{3} + 1) = -2 - 2 \cdot \sqrt{3}$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).

Hinweis: $1.7 < \sqrt{3} < 2$

Ergebniskontrolle:

Untersuchung auf Vorzeichenbereiche von $f''(x)$. Dazu zunächst Bestimmung der Nullstellen von $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{(\sqrt{3}-x)} \cdot (-x^2 + 2 \cdot x + 3) = 0 &\Leftrightarrow -x^2 + 2 \cdot x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ oder } x = 3 \end{aligned}$$

Nun Untersuchung auf Vorzeichenbereiche von $f''(x)$ mit 3.Ableitung

$f'''(x) = e^{(\sqrt{3}-x)} \cdot (x^2 - 4 \cdot x - 1)$
$f'''(-1) = e^{(\sqrt{3}+1)} \cdot 4 > 0$ und $f'''(3) = e^{(\sqrt{3}-3)} \cdot (-4) < 0$

Daher

$f''(x) \leq 0$ für $x \in [-1.5, -1]$, d.h. f konkav über $[-1.5, -1]$,

$f''(x) \geq 0$ für $x \in [-1, 3]$, d.h. f konvex über $[-1, 3]$,

$f''(x) \leq 0$ für $x \in [3, 4]$, d.h. f konkav über $[3, 4]$.

Außerdem besitzt f in $x = -1$ und $x = 3$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten

$f(-1) = e^{(\sqrt{3}+1)} \cdot (-1+2+1) = 2 \cdot e^{(\sqrt{3}+1)}$ bzw. $f(3) = e^{(\sqrt{3}-3)} \cdot (-9-6+1) = -14 \cdot e^{(\sqrt{3}-3)}$.

[5] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-1}{6\cdot e^x + 3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 6}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{6\cdot e^x + 3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 6} &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot x^2\cdot e^{x^3}}{6\cdot e^x + 9\cdot x^2 - 6\cdot x - 6} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6\cdot x\cdot e^{x^3} + 9\cdot x^4\cdot e^{x^3}}{6\cdot e^x + 18\cdot x - 6} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6\cdot e^{x^3} + 18\cdot x^3\cdot e^{x^3} + 36\cdot x^3\cdot e^{x^3} + 27\cdot x^6\cdot e^{x^3}}{6\cdot e^x + 18} \\
&= \frac{6\cdot e^0 + 0 + 0 + 0}{6\cdot e^0 + 18} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

[5] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{e^2} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 4 \cdot e^{2\cdot t} & \text{für } \ 0 \leq t < 1 \\ 4 \cdot t^3 + 3 & \text{für } \ 1 \leq t \leq 2 \\ -\frac{1}{2\cdot t} & \text{für } \ 2 < t \leq e^2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\int_0^{e^2} f(t)dt &= \int_0^1 4 \cdot e^{2\cdot t}\ dt + \int_1^2 (4 \cdot t^3 + 3)\ dt + \int_2^{e^2} \left(-\frac{1}{2 \cdot t}\right)\ dt \\
&= 4 \cdot \int_0^1 e^{2\cdot t}\ dt + 4 \cdot \int_1^2 t^3\ dt + 3 \cdot \int_1^2 1\ dt - \frac{1}{2} \int_2^{e^2} 1/t\ dt \\
&= 4\left[e^{2\cdot t}/2\right]_0^1 + 4 \cdot \left[t^4/4\right]_1^2 + 3 \cdot [t]_1^2 - \frac{1}{2}\ [\ln t]_2^{e^2} \\
&= 4\left[e^2/2 - e^0/2\right] + 4 \cdot \left[2^4/4 - 1/4\right] + 3 \cdot [2-1] - \frac{1}{2}\ [2 - \ln 2] \\
&= 2 \cdot e^2 - 2 + 15 + 3 - 1 + \ln 2/2 = 2 \cdot e^2 + 15 + \ln 2/2
\end{aligned}$$

[4] Für $1/3 \le x$ sei $F(x) := F(1/3) + \int_1^x t^{-2} \cdot \ln(3 \cdot t)\ dt$, wobei $F(1/3)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1/3) = -3$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = \ln(3 \cdot t)$, $g'(t) = t^{-2}$ ist $f'(t) = 1/t$ und $g(t) = -t^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= -3 + \int\limits_{1/3}^{x} t^{-2} \cdot \ln(3 \cdot t)\ dt \\
&= -3 + \left[-t^{-1} \cdot \ln(3 \cdot t)\right]_{1/3}^{x} - \int_{1/3}^{x} (-t^{-1} \cdot t^{-1})\ dt \\
&= -3 + \left[-t^{-1} \cdot \ln(3 \cdot t)\right]_{1/3}^{x} + \int_{1/3}^{x} t^{-2}\ dt \\
&= -3 + [-\ln(3 \cdot x)/x - 0] + \left[-t^{-1}\right]_{1/3}^{x} \\
&= -3 - \ln(3 \cdot x)/x + \left[-x^{-1} + 3\right] \\
&= -\ln(3 \cdot x)/x - 1/x
\end{aligned}
$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = \ln((x-1)^2+1)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(2) = \ln 2$.

Ergebniskontrolle:

$f(1) = 0$; $f'(x) = \frac{2\cdot(x-1)}{(x-1)^2+1}$; $f'(1) = 0$; $f''(x) = \frac{2\cdot\left((x-1)^2+1\right)-4\cdot(x-1)^2}{\left((x-1)^2+1\right)^2}$; $f''(1) = \frac{2+0}{1} = 2$;

$T_2^f(x;1) := f(1) + \frac{f'(1)}{1!}\cdot(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2 = \frac{2}{2}\cdot(x-1)^2 = (x-1)^2$.

Damit ist $f(2) \approx T_2^f(2,1) = (2-1)^2 = 1$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = (x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^3)^2$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x, y) = 2 \cdot (x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^3) \cdot (2 \cdot x + 3 \cdot y) = (x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^3) \cdot (4 \cdot x + 6 \cdot y)$$

$$f'_{xx}(x, y) = (2 \cdot x + 3 \cdot y) \cdot (4 \cdot x + 6 \cdot y) + 4 \cdot (x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^3)$$

$$f'_y(x, y) = 2 \cdot (x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^3) \cdot (3 \cdot x + 3 \cdot y^2) = (x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^3) \cdot (6 \cdot x + 6 \cdot y^2)$$

$$f''_{yy}(x, y) = (3 \cdot x + 3 \cdot y^2) \cdot (6 \cdot x + 6 \cdot y^2) + 12 \cdot y \cdot (x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^3)$$

$$f''_{xy}(x, y) = (3 \cdot x + 3 \cdot y^2) \cdot (4 \cdot x + 6 \cdot y) + 6 \cdot (x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^3)$$

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = e^{0.005 \cdot x^2 + 0.001 \cdot x \cdot y}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Transportkostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% vermindert und die Transportkosten um 10% erhöhen.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(10, 50) = 10 \cdot \frac{f_x'(10,50)}{f(10,50)}$ und $\mathcal{E}_y^f(10, 50) = 50 \cdot \frac{f_y'(10,50)}{f(10,50)}$ mit

$$f_x'(x,y) = e^{0.005 \cdot x^2 + 0.001 \cdot x \cdot y} \cdot \big(0.01 \cdot x + 0.001 \cdot y\big) \text{ und } f_y'(x,y) = e^{0.005 \cdot x^2 + 0.001 \cdot x \cdot y} \cdot 0.001 \cdot x.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 50)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{e^{0.005 \cdot 100 + 0.001 \cdot 10 \cdot 50} \cdot \big(0.01 \cdot 10 + 0.001 \cdot 50\big)}{e^{0.005 \cdot 100 + 0.001 \cdot 10 \cdot 50}} = 10 \cdot (0.1 + 0.05) = 1.5$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{e^{0.005 \cdot 100 + 0.001 \cdot 10 \cdot 50} \cdot 0.001 \cdot 10}{e^{0.005 \cdot 100 + 0.001 \cdot 10 \cdot 50}} = 50 \cdot 0.001 \cdot 10 = 0.5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 1.5 \cdot (-2)\% + 0.5 \cdot 10\% = 2\%$

d.h. eine 2% Verminderung des Rohstoffpreises bei gleichzeitiger 10% Erhöhung der Transportkosten führt zu einer ungefähr 2% Erhöhung der Herstellungskosten.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 9 \cdot x + y^3 + 15 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + 3 \cdot y = 6$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = x + 3 \cdot y - 6 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 9 \cdot x + y^3 + 15 + \lambda \cdot (x + 3 \cdot y - 6)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 9$ und $f'_y(x,y) = 3 \cdot y^2$
  - $b'_x(x,y) = 1$ und $b'_y(x,y) = 3$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 9 + \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 3 \cdot y^2 + 3 \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = x + 3 \cdot y - 6$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 9 + \lambda & = & 0 \\ 3 \cdot y^2 + 3 \cdot \lambda & = & 0 \\ x + 3 \cdot y - 6 & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -9 \\ 3 \cdot y^2 - 27 & = & 0 \\ x + 3 \cdot y - 6 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -9 \\ y^2 & = & 9 \\ x & = & 6 - 3 \cdot y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rclcrcl} \lambda & = & -9 & & & & \\ y & = & -3 & \text{oder} & y & = & 3 \\ x & = & 6 - 3 \cdot y & & & & \end{array} \right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (15, -3), P2 = (-3, 3)$ mit $\lambda = -9$

- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0:
  - $f''_{xx}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$
  - $f''_{yy}(x,y) = 6 \cdot y$
  - $b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = 0.$
- Berechnung der Werte von (x_0, y_0, λ_0) für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(15, -3, -9) = 0 - 2 \cdot 0 - 18 = -18 < 0 \Rightarrow (15, -3)$ ist eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $x + 3 \cdot y = 6$ mit Funktionswert $f(15, -3) = 123$.
  - $D_0(-3, 3, -9) = 0 - 2 \cdot 0 + 18 = 18 > 0 \Rightarrow (-3, 3)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $x + 3 \cdot y = 6$ mit Funktionswert $f(-3, 3) = 15$.