Mathematik für Ökonomen – WS 2018/19 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

05.02.2019, 09:30-11:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $-2 \cdot x \leq -3$

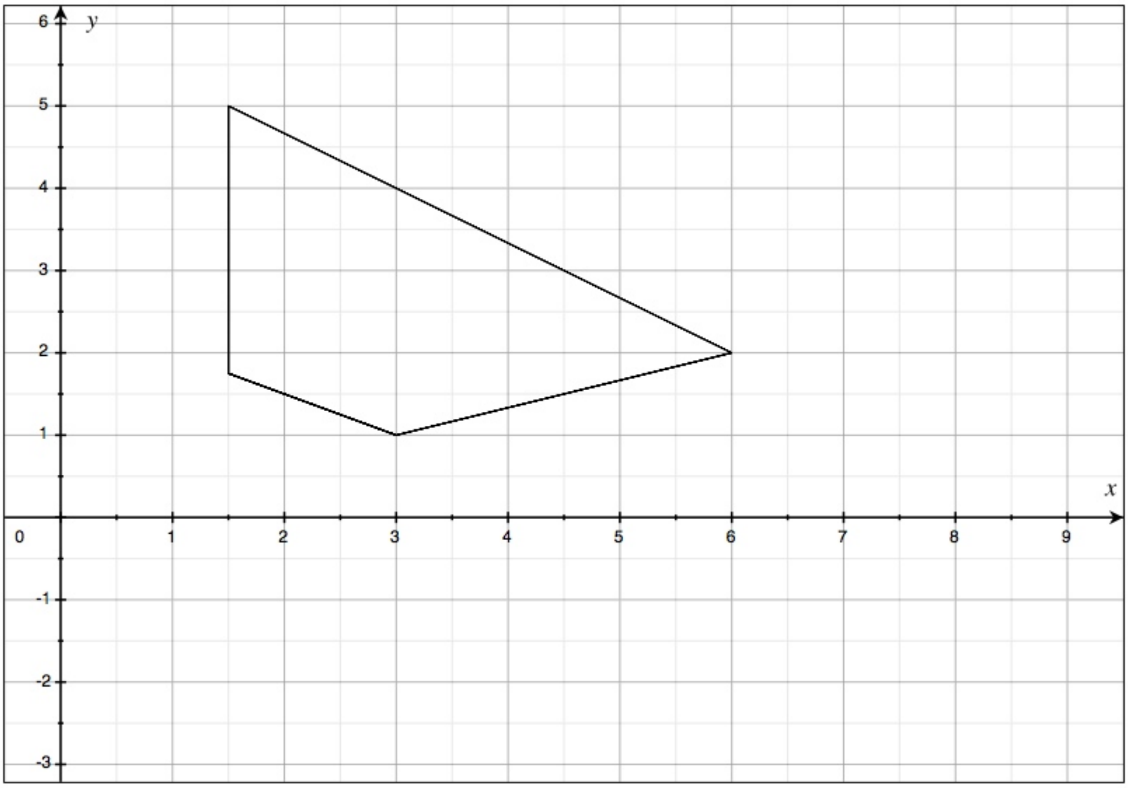
(2) $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$

(3) $x - 3 \cdot y \leq 0$

(4) $4 \cdot y + 2 \cdot x \geq 10$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) : \ x \geq \frac{3}{2} \text{ und } y \leq 6 - \frac{2}{3} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{1}{3} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

Zwischenprodukte	Endprodukte E_1	E_2	E_3
Z_1	1	1	0
Z_2	2	1	2
Z_3	2	0	1

Rohstoffe	Zwischenprodukte Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	2	1
R_2	2	1	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix} = 153$

Aufgabe 3 Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	2	3	0	0	0
4	5	9	0	0	0
7	8	6	0	0	1
0	0	0	2	2	4
0	0	0	3	4	1
5	7	12	0	0	0

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \dots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b^*
1	0	0	0	0	1/9
0	1	0	0	0	1/9
0	0	1	0	0	-1/9
0	0	0	1	0	7
0	0	0	0	1	- 5
0	0	0	0	0	0

[4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

(a) Lösungsmenge

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/9 \\ -1/9 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) **Ansatz:** Tabellenform

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	e_4	Protokoll
-2	0	0	0	1	0	0	0	I
0	-1	-3	-1	0	1	0	0	II
0	-1	1	-1	0	0	1	0	III
0	2	2	1	0	0	0	1	IV

Lösung: Nach Anwendung des Gauß-Jordan Algorithmus

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/4 & -5/4 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 20% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $10\%, 0\%, 10\%, 21\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.04$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $11^5 = 161051$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_5 = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.2)^{\frac{1}{5}} \approx 1.04 \Leftrightarrow i = 0.04 = 4\%$

(b) $K_x = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.2)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.18}{0.1} = \frac{18}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 2$

(c) $K_5 = (1.1 \cdot 1 \cdot 1.1 \cdot 1.21 \cdot 1.1) \cdot 100000 = (1.1)^5 \cdot 10^5 = 11^5 = 161051$

$i_{\text{eff}} = (1.1 \cdot 1 \cdot 1.1 \cdot 1.21 \cdot 1.1)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(1.1^5\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$

Thema: Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = -2$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \big(4 \cdot |x|\big)^{1/3} & \text{für} \quad -3 \leq x < -2 \\ 2 + \ln(3+x) & \text{für} \quad -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in x_0 = -2 : $\lim\limits_{x \to -2_-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2_-} \big(4 \cdot |x|\big)^{1/3} = \big(4 \cdot |-2|\big)^{1/3} = 8^{1/3} = 2$

RGW in x_0 = -2 : $\lim\limits_{x \to -2_+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2_+} \big(2 + \ln(3+x)\big) = \big(2 + \ln(3-2)\big) = 2 + \ln(1) = 2$

FW in x_0 =2: $f(2) = 2 + \ln(3-2) = 2 + \ln(1) = 2$

Also gilt LGW = RGW = FW, und somit ist f stetig in $x_0 = -2$.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = e^{(x-2)^4-4\cdot x}$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^{(x-2)^4-4\cdot x} \cdot \big(4 \cdot (x-2)^3 - 4\big)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x-2)^3 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3.$$

$3 \in D(f)$, also $x = 3$ einzige stationäre Stelle.

$$f''(x) = e^{(x-2)^4-4\cdot x} \cdot \big(4 \cdot (x-2)^3 - 4\big)^2 + e^{(x-2)^4-4\cdot x} \cdot 12 \cdot (x-2)^2$$

$f''(3) = \cdots = e^{-11} \cdot 12 > 0$, also $x = 3$ lokale Minimalstelle mit $f(3) = e^{-11}$.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(0) = e^{(-2)^4-0} = e^{16}$ und $f(4) = e^{2^4-16} = e^0 = 1$, außerdem $(3, e^{-11})$ einzige lokale Extremstelle, und Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend. Daher

e^{-11} minimaler Wert von $f(0), f(3), f(4)$, also $(3, e^{-11})$ globaler Minimalpunkt
e^{16} maximaler Wert von $f(0), f(3), f(4)$, also $(0, e^{16})$ globaler Maximalpunkt

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_{1/2}^{e^2} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 4 \cdot t^3 - 7/t^2 & \text{für } \ 1/2 \leq t < 1 \\ 3 \cdot t^{-1} & \text{für } \ 1 \leq t \leq e^2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{e^2} f(t)dt &= \int_{1/2}^{1} \left(4 \cdot t^3 - 7/t^2\right)\ dt + \int_{1}^{e^2} 3 \cdot t^{-1}\ dt \\ &= \cdots = 4 \cdot \left[t^4/4\right]_{1/2}^{1} - 7 \cdot \left[-t^{-1}\right]_{1/2}^{1} + 3 \cdot \left[\ln(t)\right]_1^{e^2} = \cdots = -1/16 \end{aligned}$$

Thema: Partielle Ableitungen

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = x^2 \cdot e^{x \cdot y}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x \cdot y} + x^2 \cdot y \cdot e^{x \cdot y} = e^{x \cdot y} \cdot \big(2 \cdot x + x^2 \cdot y\big)$$

$$f''_{xx}(x,y) = 2 \cdot e^{x \cdot y} + 2 \cdot x \cdot y \cdot e^{x \cdot y} + 2 \cdot x \cdot y \cdot e^{x \cdot y} + x^2 \cdot y^2 \cdot e^{x \cdot y} = e^{x \cdot y}\big(4 \cdot x \cdot y + 2 + x^2 \cdot y^2\big)$$

$$f'_y(x,y) = x^3 \cdot e^{x \cdot y}$$

$$f''_{yy}(x,y) = x^4 \cdot e^{x \cdot y}$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 3 \cdot x^2 \cdot e^{x \cdot y} + x^3 \cdot y \cdot e^{x \cdot y} = e^{x \cdot y} \cdot \big(3 \cdot x^2 + x^3 \cdot y\big)$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Die Gesamtnachfrage eines Gutes im EU-Wirtschaftraum sei modelliert durch die Funktion $f(x,y) = 10 \cdot x^{-4} \cdot y^5$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 40$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 1% vermindert und das mittlere Einkommen um 2% erhöht.

Ergebniskontrolle:

(a) An der Basisstelle $(x_0, y_0) = (40, 10)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 40 \cdot \frac{-40 \cdot 40^{-5} \cdot 10^5}{10 \cdot 40^{-4} \cdot 10^5} = -\frac{4 \cdot 40^{-4}}{40^{-4}} = -4$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{50 \cdot 40^{-4} \cdot 10^4}{10 \cdot 40^{-4} \cdot 10^5} = \frac{10 \cdot 5}{10} = 5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = -4 \cdot (-1)\% + 5 \cdot 2\% = 14\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(40, 10)$ zu $f(39.6, 10.2)$ beträgt ca. 14%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedinung)

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} - 2\cdot x\cdot y + \frac{y^2}{2} + 4 \qquad (x,y\in\mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:

Gesucht Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array}$$

Al stationäre Punkte erhält man: $P1 = (-2,-4), P2 = (0,0), P3 = (2,4)$.

Berechnung der Werte $H_D(x_0,y_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0,y_0):

- $H_D(-2,-4) = 3\cdot(-2)^2\cdot 1 - (-2)^2 = 8 > 0$ und $f''_{xx}(-2,-4) = 12 > 0 \Rightarrow (-2,-4)$ ist eine lokale Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(-2,-4) = 16/4 - 2\cdot 8 + 16/2 + 4 = 0$.
- $H_D(0,0) = 0\cdot 1 - (-2)^2 = -4 < 0 \Rightarrow (0,0)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(0,0) = 0 - 0 + 0 + 4 = 4$.
- $H_D(2,4) = 3\cdot 4\cdot 1 - (-2)^2 = 8 > 0$ und $f''_{xx}(2,4) = 12 > 0 \Rightarrow (2,4)$ ist eine lokale Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(2,4) = 16/4 - 2\cdot 8 + 16/2 + 4 = 0$.