Mathematik für Ökonomen – WS 2018/19 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

05.02.2019, 09:30-11:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

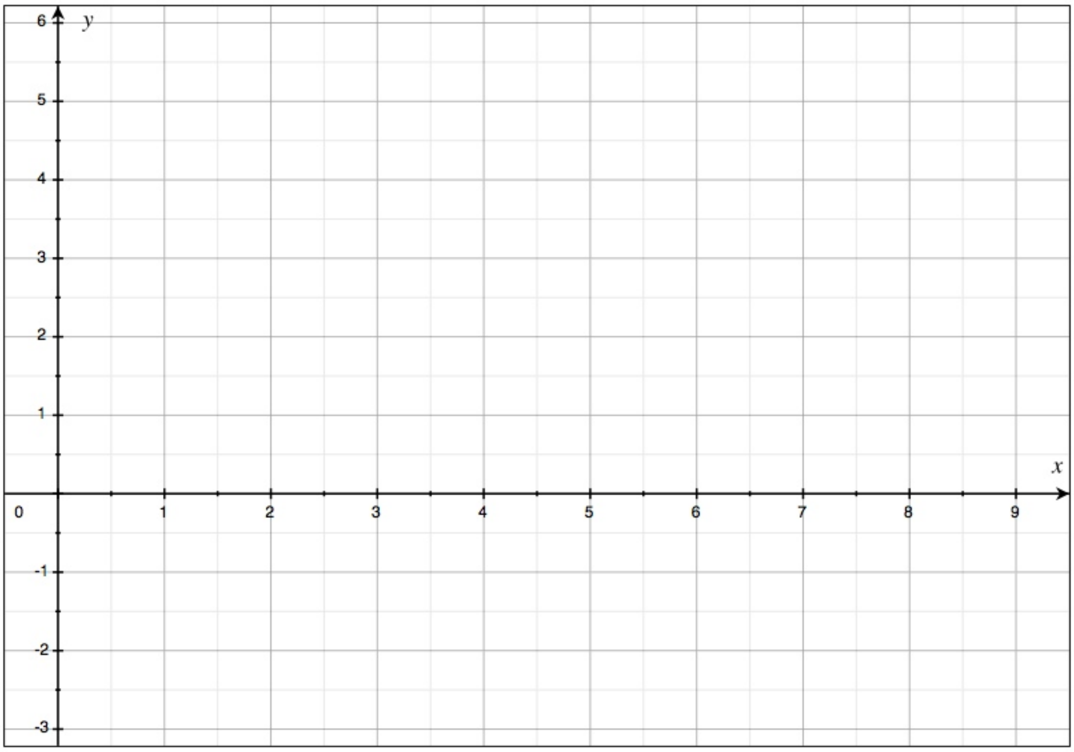
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $-2 \cdot x \leq -3$

(2) $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$

(3) $x - 3 \cdot y \leq 0$

(4) $4 \cdot y + 2 \cdot x \geq 10$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

Zwischenprodukte \ Endprodukte	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	1	0
Z_2	2	1	2
Z_3	2	0	1

Rohstoffe \ Zwischenprodukte	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	2	1
R_2	2	1	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	2	3	0	0	0
4	5	9	0	0	0
7	8	6	0	0	1
0	0	0	2	2	4
0	0	0	3	4	1
5	7	12	0	0	0

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \ldots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b^*
1	0	0	0	0	1/9
0	1	0	0	0	1/9
0	0	1	0	0	-1/9
0	0	0	1	0	7
0	0	0	0	1	- 5
0	0	0	0	0	0

[4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 20% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $10\%, 0\%, 10\%, 21\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.04$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $11^5 = 161051$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

Thema: Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = -2$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \left(4 \cdot |x|\right)^{1/3} & \text{für} \quad -3 \leq x < -2 \\ 2 + \ln(3 + x) & \text{für} \quad -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = e^{(x-2)^4 - 4\cdot x}$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^{(x-2)^4 - 4\cdot x} \cdot \big(4 \cdot (x-2)^3 - 4\big)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_{1/2}^{e^2} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 4 \cdot t^3 - 7/t^2 & \text{für } 1/2 \leq t < 1 \\ 3 \cdot t^{-1} & \text{für } 1 \leq t \leq e^2 \end{cases}$

Thema: Partielle Ableitungen

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = x^2 \cdot e^{x \cdot y}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Die Gesamtnachfrage eines Gutes im EU-Wirtschaftraum sei modelliert durch die Funktion $f(x,y) = 10 \cdot x^{-4} \cdot y^5$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 40$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 1% vermindert und das mittlere Einkommen um 2% erhöht.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} - 2 \cdot x \cdot y + \frac{y^2}{2} + 4 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)