Mathematik für Ökonomen – WS 2019/20 – Campus Duisburg
Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

11.02.2020, 09:30-11:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $x \geq 1$

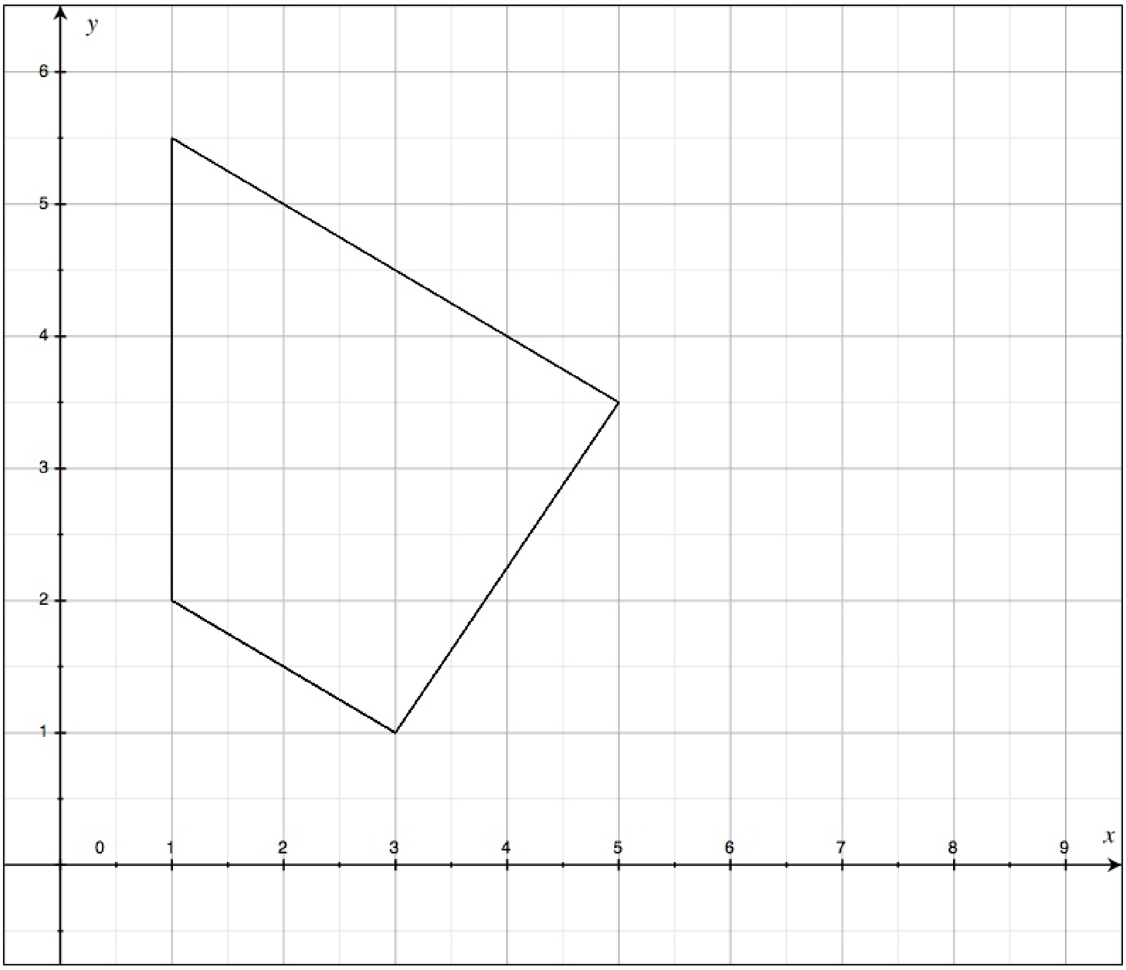
(2) $2y + x \geq 5$

(3) $2y + x \leq 12$

(4) $y - \frac{5}{4}x \geq -\frac{11}{4}$

Ergebniskontrolle:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x,y) : x \geq 1 \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \text{ und } y \leq 6 - \frac{1}{2}x \text{ und } y \geq \frac{5}{4} \cdot x - \frac{11}{4} \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

(a) $(C^T \cdot A) + B$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $C^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2}$; $C^T \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 20 & 4 & 12 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(C^T \cdot A) + B = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 21 & 4 & 12 \\ 13 & 10 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$.

(b) C^{-1} ist nicht definiert, denn C ist keine quadratische Matrix!

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

x_1	x_2	x_3	b
3	-1	2	1
2	0	1	1
1	1	0	1

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	b^*
1	0	1/2	1/2
0	1	-1/2	1/2
0	0	0	0

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

(ii) Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$B \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

(a) Lösungsmenge

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1/2 - x_3/2 \\ x_2 & = & 1/2 + x_3/2 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

(b)

zu (i):

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	-1	2	1	0	0	I
-3	1	2	0	1	0	II
1	-1	1	0	0	1	III
1	1	-2	-1	0	0	(-1) · I
-3	1	2	0	1	0	II
1	-1	1	0	0	1	III
1	1	-2	-1	0	0	I
0	4	-4	-3	1	0	II + 3· I
0	-2	3	1	0	1	III - I
1	1	-2	-1	0	0	I
0	1	-1	-3/4	1/4	0	1/4 · II
0	-2	3	1	0	1	III

1	0	-1	-1/4	-1/4	0	I - II
0	1	-1	-3/4	1/4	0	II
0	0	1	-1/2	1/2	1	III + 2 · II
1	0	0	-3/4	1/4	1	I + III
0	1	0	-5/4	3/4	1	II + III
0	0	1	-1/2	1/2	1	III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

zu (ii):

Das lineare Gleichungssystem läßt sich lösen durch Matrixmultiplikation von links mit der Inversen von B. Daher ist

$$x = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems.

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 60% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 25\%$ und ein Zielwert K_x, der 60% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $20\%, 20\%, 0\%, 44\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.6^{\frac{1}{4}} \approx 1.13$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.6 \approx 0.47$, $144^2 = 20736$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_4 = 1.6 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^4 \Leftrightarrow 1 + i = (1.6)^{\frac{1}{4}} \approx 1.13 \Leftrightarrow i = 0.13 = 13\%$

(b) $K_x = 1.6 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.25)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.6)}{\ln(1.25)} \approx \frac{0.47}{0.22} = \frac{47}{22}$; $n = \lceil x \rceil = 3$

(c) $K_4 = (1.2 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.44) \cdot 10000 = 12 \cdot 12 \cdot 144 = 144^2 = 20736$

$i_{\text{eff}} = (1.2 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.44)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.2^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

[3] Überprüfen Sie, ob für die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = 0$ der Grenzwert existiert:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2 - 4\cdot(1+x)}{x^2-3} & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \ln\left((x+2)^3 + x\right) & \text{für} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{(x+1)^2-4\cdot(1+x)}{x^2-3} = \frac{1-4}{0-3} = 1$

RGW in $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x\to -0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} \ln\left((x+2)^3 + x\right) = \ln(2^3+0) = \ln 8$

Es gilt $8 > e$, ausserdem ist ln streng monoton wachsend, also

$$\text{RGW} = \ln 8 > \ln e = 1 = \text{LGW}.$$

D.h. RGW $\neq$ LGW, also existiert für f der Grenzwert in $x_0 = 0$ nicht.

Gegeben $f(x) = e^x \cdot \big(x^2 - 4 \cdot x - 4\big) + 5$ mit $D(f) = [-1, 0]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^x \cdot \big((x-1)^2 - 9\big)$.

[2](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot \big((x-1)^2 - 9\big) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow \quad |x-1|^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow \quad |x-1| = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 1 = -3 \quad \text{oder} \quad x - 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \text{oder} \quad x = 4 \end{aligned}$$

$-2 \notin D(f)$ und $4 \notin D(f)$, also existiert keine stationäre Stelle! Daher existieren keine lokalen Extrempunkte.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-1) = 5 + e^{-1}$ und $f(0) = 1$. Da die Exponentialfunktion immer positive Werte besitzt, erhält man

$1 = f(0)$ als minimalen Wert von $f(-1), f(0)$,
$5 + e^{-1} = f(-1)$ als maximalen Wert von $f(-1), f(0)$.

Da außderdem kein lokaler Extrempunkt existiert, ist $(0, 1)$ globaler Minimalpunkt und $(-1, 5 + e^{-1})$ globaler Maximalpunkt.

[1](c) Geben Sie den globalen Minimalpunkt von $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$ über dem Definitionsbereich $D(f)$ an (bitte mit Begründung).

Ergebniskontrolle:

$(0, 1)$ globaler Minimalpunkt, d.h. $f(x) \geq f(0)$ für alle $x \in [-1, 0]$. Da die Logarithmusfunktion strikt monoton wachsend ist, folgt daher $\ln\big(f(x)\big) \geq \ln\big(f(0)\big)$ für alle $x \in [-1, 0]$. D.h. $\big(0, \ln(1)\big) = (0, 0)$ globaler Maximalpunkt von $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$.

Gegeben sei die Funktion $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{für } 1 \leq t \leq 4 \\ e^{2\cdot t} & \text{für } 4 < t \leq 5 \end{cases}.$$

Für $1 \leq x \leq 5$ sei $F(x) := \int_1^x f(t)\, dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(4)$.

[3] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in]4,5]$.

Ergebniskontrolle:

(a) Es gilt

$$F(4) = \int_1^4 f(t)dt = \int_1^4 t^{-1/2}\, dt \quad = \quad \Big[2 \cdot t^{1/2}\Big]_1^4 = 2 \cdot 4^{1/2} - 2 = 2.$$

(b) Für $4 < x \leq 5$ gilt

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^4 t^{-1/2}\, dt + \int_4^x e^{2\cdot t}\, dt = F(4) + \left[\frac{1}{2} \cdot e^{2\cdot t}\right]_4^x = 2 + \frac{1}{2} \cdot e^{2\cdot x} - \frac{1}{2} \cdot e^8.$$

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = e^{x \cdot y^2}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy}.

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = y^2 \cdot e^{x \cdot y^2}$

$f''_{xx}(x,y) = y^4 \cdot e^{x \cdot y^2}$

$f'_y(x,y) = 2 \cdot x \cdot y \cdot e^{x \cdot y^2}$

$f''_{yy}(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x \cdot y^2} + (2 \cdot x \cdot y) \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot e^{x \cdot y^2} = 2 \cdot x \cdot e^{x \cdot y^2} \cdot \left(1 + 2 \cdot x \cdot y^2\right)$

[5] Betrachten Sie die Nachfragefunktion $f(x,y) = 200 \cdot x^{-1} \cdot y^4$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 1% erhöht und das mittlere Einkommen um 2% vermindert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x,y) = -200 \cdot x^{-2} \cdot y^4 \text{ und } f'_y(x,y) = 800 \cdot x^{-1} \cdot y^3.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50, 10)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{-200 \cdot 50^{-2} \cdot 10^4}{200 \cdot 50^{-1} \cdot 10^4} = -\frac{50^{-1}}{50^{-1}} = -1$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{800 \cdot 50^{-1} \cdot 10^3}{200 \cdot 50^{-1} \cdot 10^4} = \frac{4 \cdot 10^4}{10^4} = 4.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = (-1) \cdot 1\% + 4 \cdot (-2)\% = -9\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(50, 10)$ zu $f(50.5, 9.8)$ beträgt ca. -9%.

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = y \cdot x^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 9$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x, y, \lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x, y)) \cdot (b'_y(x, y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x, y)) \cdot b'_x(x, y) \cdot b'_y(x, y) \\ & +(f''_{yy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x, y)) \cdot (b'_x(x, y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x, y) = 2 \cdot x + y - 9 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x, y, \lambda) = y \cdot x^2 + \lambda \cdot (2 \cdot x + y - 9)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x, y) = 2 \cdot x \cdot y$ und $f'_y(x, y) = x^2$
  - $b'_x(x, y) = 2$ und $b'_y(x, y) = 1$
  - $L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda \cdot b'_x(x, y) = 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda \cdot b'_y(x, y) = x^2 + \lambda$
  - $L'_\lambda(x, y, \lambda) = b(x, y) = 2 \cdot x + y - 9$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot \lambda & = & 0 \\ x^2 + \lambda & = & 0 \\ 2 \cdot x + y - 9 & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 \cdot x \cdot y - 2 \cdot x^2 & = & 0 \\ \lambda & = & -x^2 \\ y & = & 9 - 2 \cdot x \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 \cdot x \cdot (y - x) & = & 0 \\ \lambda & = & -x^2 \\ y & = & 9 - 2 \cdot x \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \quad \text{oder} \quad x = y \\ \lambda & = & -x^2 \\ y & = & 9 - 2 \cdot x \end{array} \right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (0, 9)$ mit $\lambda = 0$ und $P2 = (3, 3)$ mit $\lambda = -9$

- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0:
  - $f''_{xx}(x, y) = 2y, f''_{yy}(x, y) = 0, f''_{xy}(x, y) = 2x$
  - $b''_{xx}(x, y) = b''_{yy}(x, y) = b''_{xy}(x, y) = b''_{yx}(x, y) = 0.$

- Berechnung der Werte von (x_0, y_0, λ_0) für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(0, 9, 0) = (2 \cdot 9 + 0) \cdot 1^2 - 2 \cdot (0 + 0) \cdot 2 \cdot 1 + (0 + 0) \cdot 2^2 = 18 > 0 \Rightarrow (0, 9)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 9$ mit Funktionswert $f(0, 9) = 0$.
  - $D_0(3, 3, -9) = (6 + 0) \cdot 1^2 - 2 \cdot (6 + 0) \cdot 2 \cdot 1 + (0 + 0) \cdot 2^2 = 6 - 24 = -18 < 0 \Rightarrow (3, 3)$ ist eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 9$ mit Funktionswert $f(3, 3) = 27$.