Mathematik für Ökonomen – WS 2019/20 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

11.02.2020, 09:30-11:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

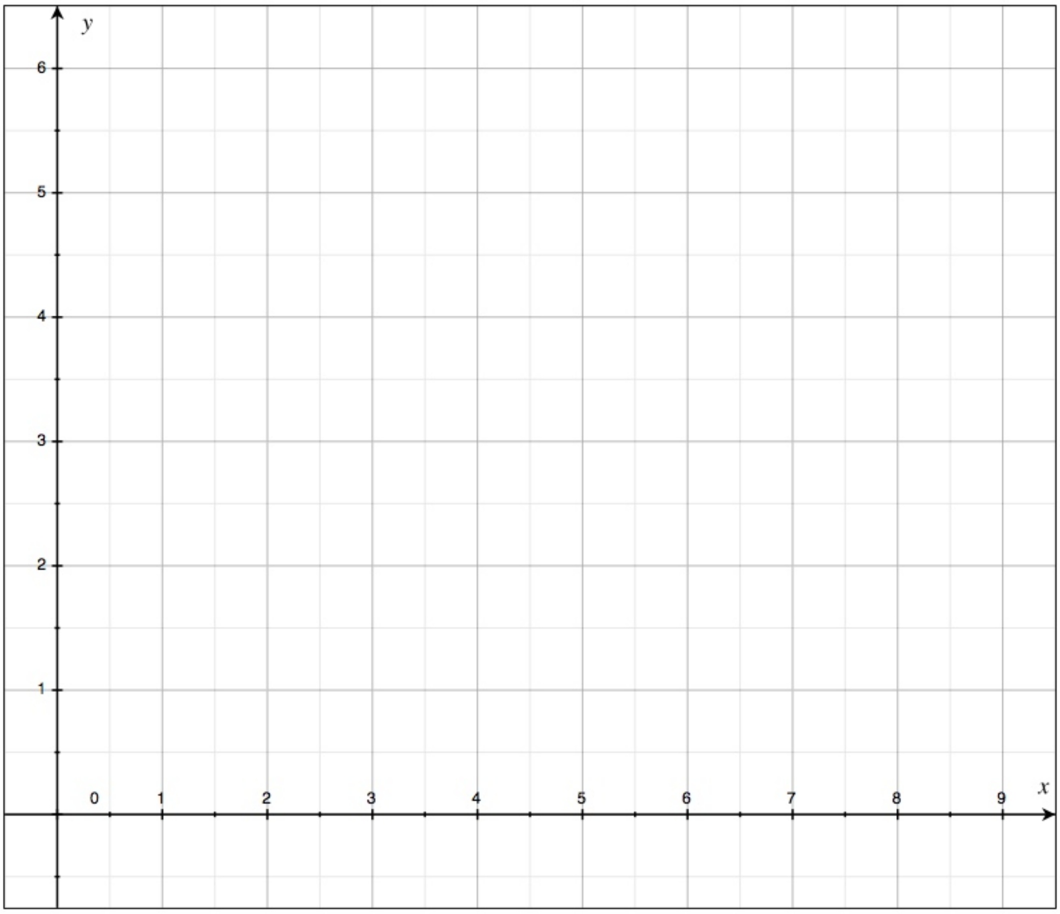
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $x \geq 1$

(2) $2y + x \geq 5$

(3) $2y + x \leq 12$

(4) $y - \frac{5}{4}x \geq -\frac{11}{4}$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

(a) $(C^T \cdot A) + B$

(b) C^{-1}

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

(ii) Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$B \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 60% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 25\%$ und ein Zielwert K_x, der 60% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $20\%, 20\%, 0\%, 44\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.6^{\frac{1}{4}} \approx 1.13$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.6 \approx 0.47$, $144^2 = 20736$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

[3] Überprüfen Sie, ob für die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = 0$ der Grenzwert existiert:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2 - 4 \cdot (1+x)}{x^2 - 3} & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \ln\left((x+2)^3 + x\right) & \text{für} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = e^x \cdot \big(x^2 - 4 \cdot x - 4\big) + 5$ mit $D(f) = [-1, 0]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^x \cdot \big((x-1)^2 - 9\big)$.

[2](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[1](c) Geben Sie den globalen Minimalpunkt von $g(x) = \ln\big(f(x)\big)$ über dem Definitionsbereich $D(f)$ an (bitte mit Begründung).

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die Funktion $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{für } \ 1 \leq t \leq 4 \\ e^{2 \cdot t} & \text{für } \ 4 < t \leq 5 \end{cases}.$$

Für $1 \leq x \leq 5$ sei $F(x) := \int_1^x f(t)\ dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(4)$.

[3] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in]4, 5]$.

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = e^{x \cdot y^2}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy}.

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Nachfragefunktion $f(x, y) = 200 \cdot x^{-1} \cdot y^4$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 1% erhöht und das mittlere Einkommen um 2% vermindert.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = y \cdot x^2 \qquad\qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 9$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$