Mathematik für Ökonomen – WS 2022/23 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. Rene Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen A

07.02.2023, 09:00-11:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y \;-\; 2 \cdot x \;\leq\; 2$

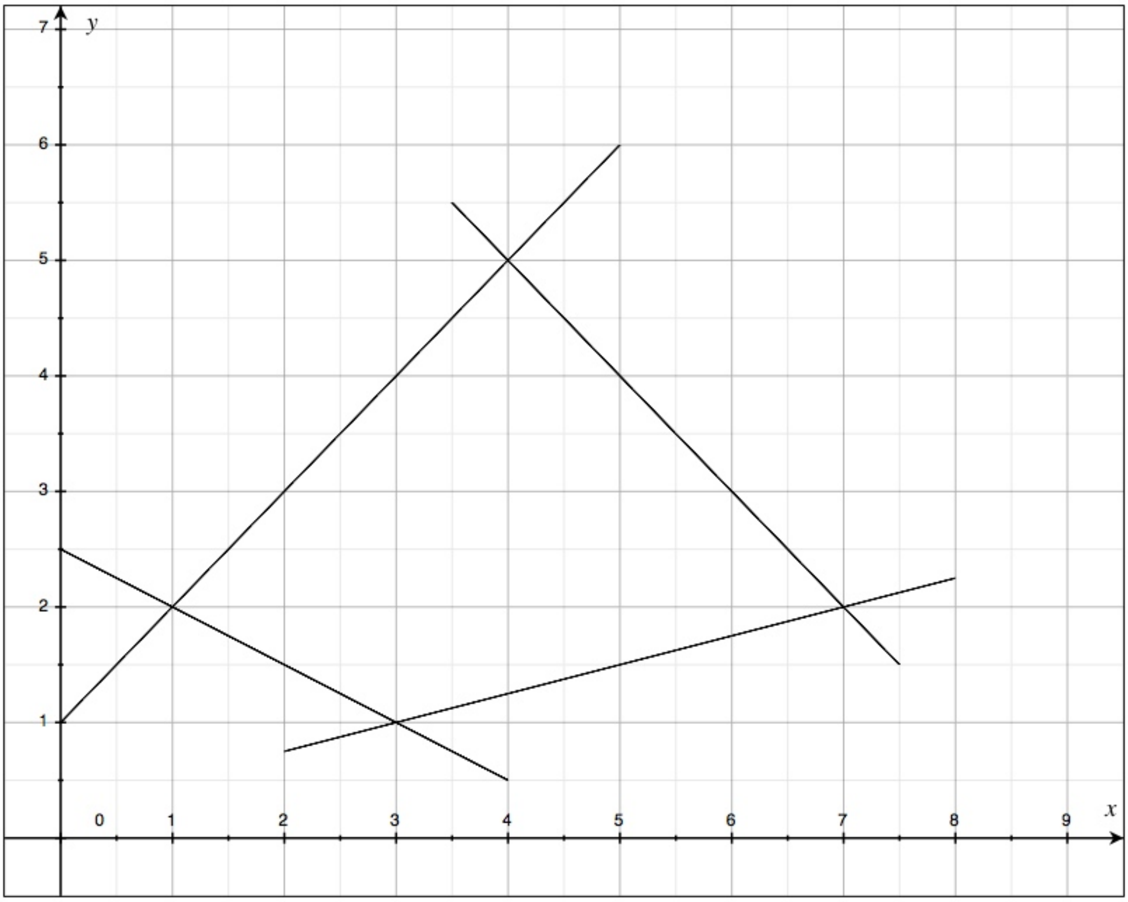
(2) $2 \cdot y \;+\; x \geq \; 5$

(3) $-2 \cdot y \;+ \frac{1}{2} \cdot x \leq \; -\frac{1}{2}$

(4) $y + x \leq 9$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{(x, y) : y \leq 1 + x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \leq 9 - x\right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[5] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	3	1	2
	R_2	1	2	1

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	2	2
	Z_2	1	2	2
	Z_3	1	0	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Wieviele Einheiten von Rohstoff R_2 werden zur Herstellung von 1 Einheit des Endproduktes E_3 benötigt?

(c) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \ldots = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

(b) Der Bedarf an Rohstoff R_2 für eine Einheit von Endprodukt E_3 entspricht dem Matrixelement von M_{RE} in der zweiten Zeile und dritten Spalte, also werden 7 Einheiten von Rohstoff R_2 für 1 Einheit von E_3 benötigt.

(c) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 46 \\ 32 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 2) \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 32 \end{pmatrix} = 156$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[3] (a) Bei Anwendung Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 13 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

(ii) Berechnen Sie den Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des linearen Gleichungssystems, bei Wahl von $x_3 = x_4 = 1$.

[6] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension muß Y besitzen?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

(iii) Wie ändert sich die allgemeine Lösung Y, wenn in obiger Matrixgleichung in den Matrizen A und B jeweils alle Elemente halbiert werden. Begründen Sie bitte Ihre Aussage.

(iv) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Matrix-Gleichung $X \cdot A^T = B^T$.

Ergebniskontrolle:

(a) zu (i):

Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{array}{lclcll} x_1 & = & 1 & - & x_3 & -2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & 3 & & + & x_4 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & & \end{array} \right\}$$

zu (ii):

Aus Teil (i) ergibt sich für $x_3 = x_4 = 1$

$$x_1 = \ldots = -2 \text{ und } x_2 = \ldots = 4.$$

D.h. in diesem Falle ist $(-2, 4, 1, 1)^T$ der entsprechende Lösungsvektor.

(b) zu (i):

Y ist eine Matrix mit 3 Zeilen und 2 Spalten.

zu (ii):
Ansatz: Tabellenform

y_1	y_2	y_3	b_1	b_2	Protokoll
3	3	6	3	3	I
4	-1	2	-2	2	II

Lösung: nach Anwendung des Gauß-Jordan Algorithmus
Lösungsmatrix:

$$Y = \begin{pmatrix} (-1/5 - 4/5\ a) & (3/5 - 4/5\ b) \\ (6/5 - 6/5\ a) & (2/5 - 6/5\ b) \\ a & b \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

zu (iii):
es gilt

$$\left(\frac{1}{2} \cdot A\right) \cdot Y = \frac{1}{2} \cdot B \Leftrightarrow A \cdot Y = B,$$

also dieselbe allgemeine Lösung wie bei der Matrixgleichung $A \cdot Y = B$.

zu (iv):
es gilt

$$X \cdot A^T = B^T \Leftrightarrow A \cdot X^T = B.$$

Also erhält man $X = Y^T$ als Lösung von $X \cdot A^T = B^T$, wobei Y die Lösung von $A \cdot Y = B$ bezeichne.

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 25% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 3\%$ und ein Zielwert K_x, der 25% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ und Zinsstaffel $10\%, 21\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_3 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.25^{\frac{1}{3}} \approx 1.08$, $\ln 1.03 \approx 0.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $11^3 = 1331$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_3 = 1.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.25)^{\frac{1}{3}} \approx 1.08 \Leftrightarrow i = 0.08 = 8\%$

(b) $K_x = 1.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.03)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.25)}{\ln(1.03)} \approx \frac{0.22}{0.03} = \frac{22}{3}$; $n = \lceil x \rceil = 8$

(c) $K_3 = (1.1 \cdot 1.21 \cdot 1) \cdot 1000 = 11 \cdot 121 = 11^3 = 1331$

$i_{\text{eff}} = (1.1 \cdot 1.21 \cdot 1)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(1.1^3\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim_{x\to -4} \left(x^2 + 5 \cdot x + 12\right)^{4/3}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to -4} \left(x^2 + 5 \cdot x + 12\right)^{4/3} = \ldots = 16.$$

[1] (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

Ergebniskontrolle: siehe Skript, Thema 4, Bsp 6, (c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} x^{-1/2} = 0.$$

[2] (c) $\lim_{x\to 1/2} e^{|\ln x|}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to 1/2} e^{|\ln x|} = e^{|\ln(1/2)|}.$$

ln streng monoton wachsend, also $\ln(1/2) < \ln 1 = 0$. Daher $|\ln(1/2)| = -\ln(1/2)$, und somit

$$\lim_{x\to 1/2} e^{|\ln x|} = e^{-\ln(1/2)} = \frac{1}{e^{\ln(1/2)}} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

alternativ:

$e^{|\ln(1/2)|} = e^{|-\ln(2)|}$. Außerdem ln streng monoton wachsend, also $\ln(2) > \ln 1 = 0$. Daher $|-\ln(2)| = \ln(2)$, und somit

$$\lim_{x\to 1/2} e^{|\ln x|} = e^{\ln(2)} = 2.$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = (2 \cdot x + 1)^{5/2} - 40 \cdot x$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 5 \cdot (2 \cdot x + 1)^{3/2} - 40$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(2 \cdot x + 1\right)^{3/2} = 8 \Leftrightarrow 2 \cdot x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3/2$$

$3/2 \in D(f)$ und keine Randstelle von $D(f)$. Also $x = 3/2$ einzige stationäre Stelle.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$f''(x) = 15 \cdot (2 \cdot x + 1)^{1/2}$
$f''(3/2) = \ldots = 30 > 0$, also $x = 3/2$ lokale Minimalstelle mit $f(3/2) = \ldots = -28$.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(0) = \ldots = 1$ und $f(4) = \ldots = 83$. Es gilt

$$f(3/2) = -28 < 1 = f(0) < 83 = f(4).$$

Somit erhalten wir

$-28 = f(3/2)$ als minimalen Wert von $f(0), f(3/2), f(4)$,
$83 = f(4)$ als maximalen Wert von $f(0), f(3/2), f(4)$.

D.h. $(3/2, -28)$ ist globaler Minimalpunkt, und $(4, 83)$ ist globaler Maximalpunkt.

Thema: Partielle Ableitungen

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = \ln\left(x \cdot y + x^2 + y\right) \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{yx}.

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = \frac{2 \cdot x + y}{x \cdot y + x^2 + y}$$

$$f''_{xx}(x,y) = \ldots = \frac{2 \cdot (x \cdot y + x^2 + y) - (2 \cdot x + y)^2}{(x \cdot y + x^2 + y)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{x + 1}{x \cdot y + x^2 + y}$$

$$f''_{yy}(x,y) = -\frac{(x+1)^2}{(x \cdot y + x^2 + y)^2}$$

$$f''_{yx}(x,y) = \ldots = \frac{-x^2 - 2 \cdot x}{(x \cdot y + x^2 + y)^2}$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Die Gesamtnachfrage eines Gutes im EU-Wirtschaftraum sei modelliert durch die Funktion $f(x,y) = 100 \cdot x^{-2/3} \cdot y^{3/4}$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 40$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 3% vermindert und das mittlere Einkommen um 2% erhöht.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f_x'(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f_y'(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f_x'(x,y) = -\frac{200}{3} \cdot x^{-5/3} \cdot y^{3/4} \text{ und } f_y'(x,y) = 75 \cdot x^{-2/3} \cdot y^{-1/4}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (40, 10)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = \ldots = -\frac{2}{3}$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = \ldots = \frac{3}{4}.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = -\frac{2}{3} \cdot (-3)\% + \frac{3}{4} \cdot 2\% = 3.5\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(40, 10)$ zu $f(38.8, 10.2)$ beträgt ca. 3.5%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $f(x,y) = 2 \cdot x^2 + y^2$ eines Unternehmens in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode diese Funktion auf (lokale) Extremwerte unter der Erlösbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y = 12$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 2 \cdot x^2 + y^2 + \lambda \cdot \big(4 \cdot x + 2 \cdot y - 12\big)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 4 \cdot x$ und $f'_y(x,y) = 2 \cdot y$
  - $b'_x(x,y) = 4$ und $b'_y(x,y) = 2$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 4 \cdot x + 4 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 2 \cdot y + 2 \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & -x \\ y & = & x \\ 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & -x \\ y & = & x \\ 6 \cdot y & = & 12 \end{array}\right\}$$

Also ist $(2,2,-2)$ die einzige Lösung des Gleichungssystems. Außerdem $(2,2) \in D(f)$, so dass $P1 = (2,2)$ der einzige bedingt stationäre Punkt ist.

- Zur Berechnung des Wertes von $D(2,2,-2)$
  - $f''_{xx}(x,y) = 4, f''_{yy}(x,y) = 2, f''_{xy}(x,y) = 0$
  - $b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = 0.$
- Berechnung des Wertes von $(2,2,-2)$

$$D(2,2,-2) = \ldots = 48.$$

  $D(2,2,-2) > 0$, also ist $(2,2)$ eine lokale Minimalstelle der Gesamtkostenfunktion f unter der Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y = 12$ mit Funktionswert $f(2,2) = 2 \cdot 2^2 + 2^2 = 12$.