# Mathematik für Ökonomen – WS 2022/23 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. Rene Simon, Fakultät für Mathematik

## Klausur Mathematik für Ökonomen B

07.02.2023, 12:00-14:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

**Platznummer**

**Matrikelnummer**

**Name**

**Vorname**

**Geburtsdatum** ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

**Unterschrift** ____________________________________________

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

________________________________________________________________________________

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

**Thema: Lineare Ungleichungssysteme**

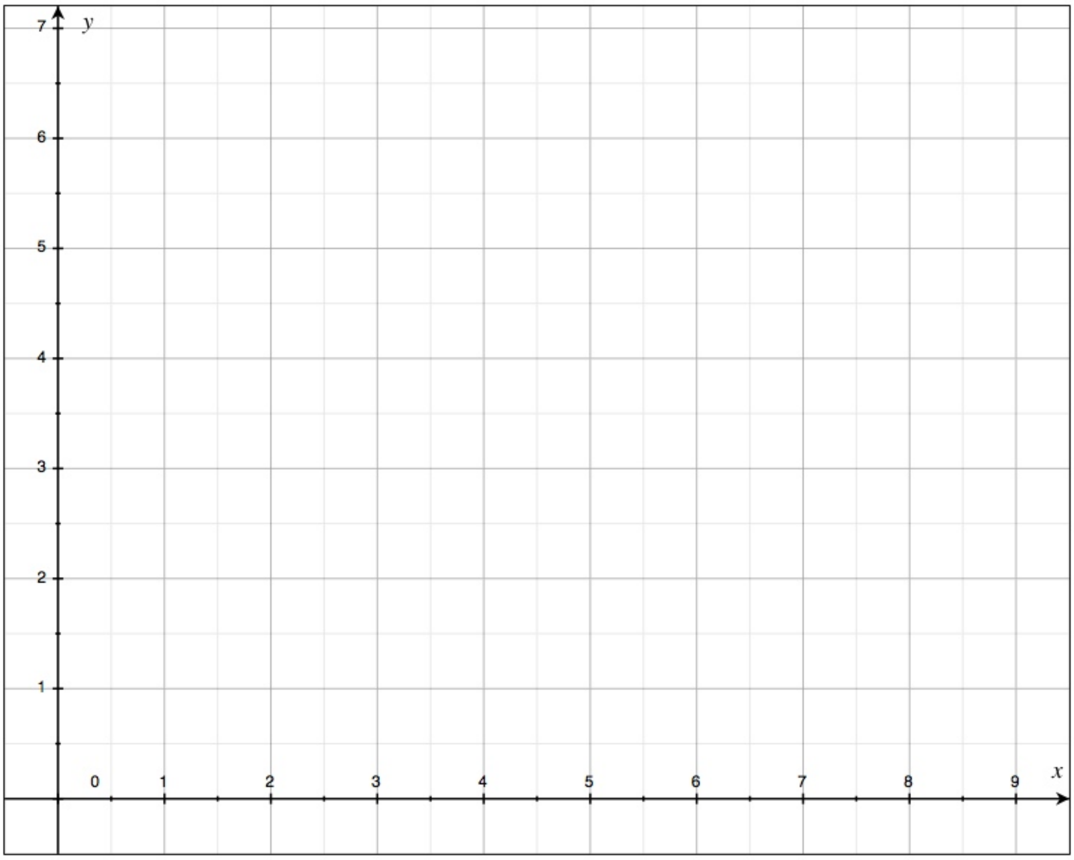
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

**(1)** $-2 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot x \leq -\frac{1}{2}$

**(2)** $2 \cdot y + x \geq 5$

**(3)** $3 \cdot y - 3 \cdot x \leq 3$

**(4)** $y + x \leq 9$




(Ersatzvorlage siehe Anhang)

**Thema: Rechnen mit Matrizen**

[5] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

Rohstoffe / Zwischenprodukte:

| | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | 3 | 1 | 2 |
| $R_2$ | 1 | 2 | 1 |

Zwischenprodukte / Endprodukte:

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|
| $Z_1$ | 1 | 2 | 2 |
| $Z_2$ | 1 | 2 | 2 |
| $Z_3$ | 1 | 0 | 1 |

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

**(a)** Berechnen Sie $M_{RE}$, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

**(b)** Wieviele Einheiten von Rohstoff $R_2$ werden zur Herstellung von 1 Einheit des Endproduktes $E_1$ benötigt?

**(c)** Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

### Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[3] (a) Bei Anwendung Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 8 & 10 & 26 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

(ii) Berechnen Sie den Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des linearen Gleichungssystems, bei Wahl von $x_3 = 2$ und $x_4 = 1$.

[6] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei $Y$ unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension muß $Y$ besitzen?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für $Y$.

(iii) Wie ändert sich die allgemeine Lösung $Y$, wenn die obige Matrixgleichung ersetzt wird durch die Matrixgleichung $(E_{2\times 2} \cdot A) \cdot Y = E_{2\times 2} \cdot B$. Begründen Sie bitte Ihre Aussage.

(iv) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Matrix-Gleichung $X \cdot A^T = B^T$.

## Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert $K_3$ um 25% über dem Anfangswert $K_0$ liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 3\%$ und ein Zielwert $K_x$, der 25% über dem Anfangwert $K_0$ liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der $n$-ten Verzinsung soll $K_n$ <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ und Zinsstaffel $10\%, 21\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert $K_3$ bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000$ und den effektiven Zinssatz $i_{\text{eff}}$.

Hilfswerte: $1.25^{\frac{1}{3}} \approx 1.08$, $\ln 1.03 \approx 0.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $11^3 = 1331$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

**Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen**

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim_{x \to 4} \left(x^2 - 5 \cdot x + 12\right)^{4/3}$

[1] (b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{x}$

[2] (c) $\lim_{x \to 2} e^{2 \cdot |\ln x|}$

**Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen**

Gegeben $f(x) = (x+3)^{5/2} - 20 \cdot x$ mit $D(f) = [-2, 6]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
$f$ hat die Ableitung $f'(x) = \frac{5}{2} \cdot (x+3)^{3/2} - 20$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von $f$ über dem Definitionsbereich.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von $f$ über dem Definitionsbereich.

**Thema: Partielle Ableitungen**

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = \ln\left(x \cdot y + x + y^2\right) \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen $f'_x$, $f'_y$, sowie $f''_{xx}$, $f''_{yy}$, $f''_{xy}$.

**Thema: Partielle und totale Marginalanalyse**

[5] Die Gesamtnachfrage eines Gutes im EU-Wirtschaftraum sei modelliert durch die Funktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{3/4} \cdot y^{-2/3}$ mit mittlerem Einkommen $x > 0$ und Preis $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle $(x_0, y_0)$ mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 40$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Preiselastizität $\mathcal{E}_y^f$ und an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion $f$ an der obigen Basisstelle, wenn sich dort das mittlere Einkommen um 2% erhöht und der Preis um 3% vermindert.

**Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)**

[7] Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $f(x, y) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 - 6 \cdot y + 3$ eines Unternehmens in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode diese Funktion auf (lokale) Extremwerte unter der Erlösbedingung $3 \cdot x + 6 \cdot y = 36$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

**Formel für die berandete Hesse-Determinante:**

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$