Mathematik für Ökonomen – WS 2023/24 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

06.02.2024, 10:30-12:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone**, **Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrekturabschnitt!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y \;-\; 2 \cdot x \;\leq\; 2$

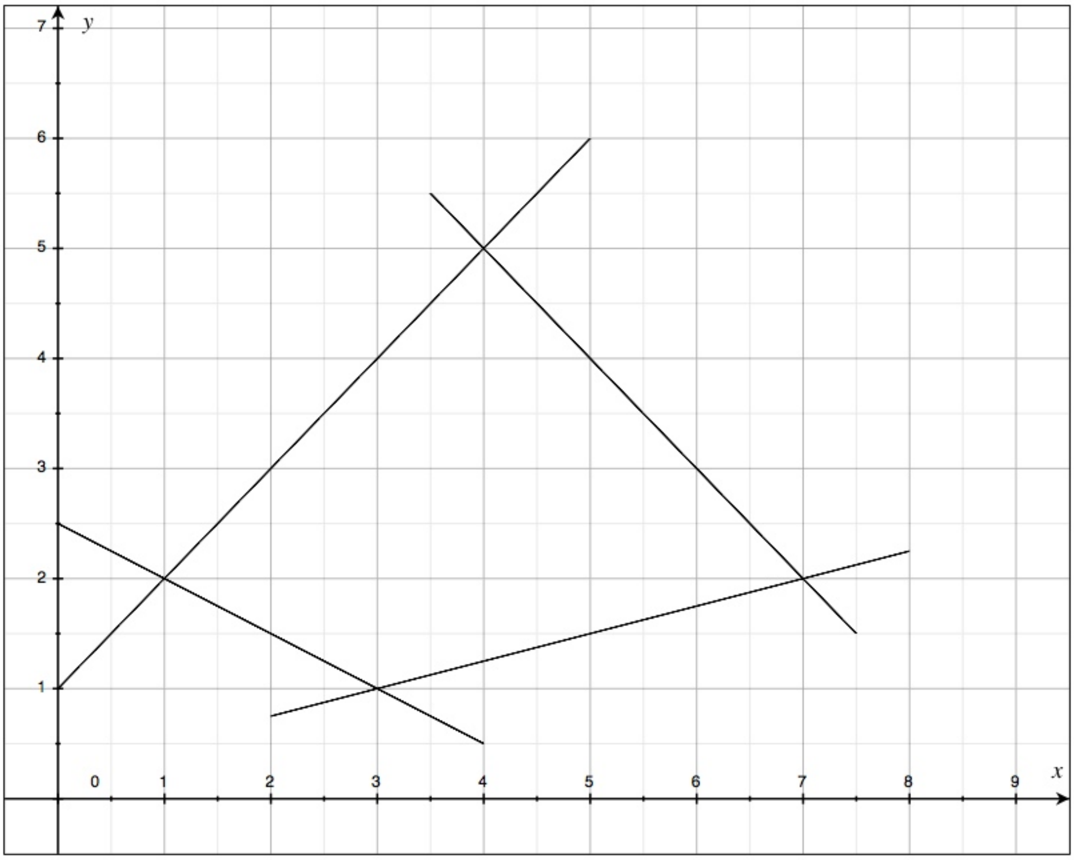
(2) $2 \cdot y \;+\; x \geq \; 5$

(3) $2 \cdot y \;-\frac{1}{2} \cdot x \geq \; \frac{1}{2}$

(4) $y + x \leq 9$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{(x, y) : y \leq 1 + x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \leq 9 - x\right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

(a) $(A \cdot B) + C$

(b) D^{-1} für $D = C \cdot B$

Ergebniskontrolle:

(a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$; $(A \cdot B) + C = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 12 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$.

(b) Die Matrix D ist eine 2×3-Matrix, insbesondere ist D keine quadratische Matrix. Daher ist D^{-1} nicht definiert.

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 36 \\ 1 & 9 & -3 & 7 & 45 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 9 \end{array}$$

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension besitzt Y?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ ist eine Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & = & -9 & + & 2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & 9 & - & \frac{3}{2} \cdot x_4 \\ x_3 & = & 9 & - & \frac{3}{2} \cdot x_4 \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

(b) zu (i):

$A_{2\times 3} \cdot Y_{m\times n} = B_{2\times 3}$, also $m = 3$ und $n = 3$. Die Matrix Y besitzt 3 Zeilen und 3 Spalten.

zu (ii):

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	b_3	Protokoll
1	3	3	1	0	2	I
1	9	-3	0	1	-1	II
1	3	3	1	0	2	I
0	6	- 6	-1	1	- 3	II - I
1	3	3	1	0	2	I
0	1	-1	-1/6	1/6	-1/2	(1/6)·II
1	0	6	3/2	-1/2	7/2	I - 3· II
0	1	- 1	-1/6	1/6	-1/2	II

Lösung Y von $A \cdot Y = B$ spaltenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 - 6 \cdot x_3 \\ -1/6 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 - 6 \cdot x_3 \\ 1/6 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 7/2 - 6 \cdot x_3 \\ -1/2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die x_3 in $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ und $\mathbb{L}_3$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} (3/2 - 6 \cdot a) & (-1/2 - 6 \cdot b) & (7/2 - 6 \cdot c) \\ (-1/6 + a) & (1/6 + b) & (-1/2 + c) \\ a & b & c \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ und Zinsstaffel $69\%, 0\%, 30\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_3 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{3}} \approx 1.14$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $13^3 = 2197$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_3 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{3}} \approx 1.14 \Leftrightarrow i = 0.14 = 14\%$

(b) $K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.41}{0.1} = \frac{41}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 5$

(c) $K_3 = (1.69 \cdot 1 \cdot 1.3) \cdot 1000 = 169 \cdot 13 = 13^3 = 2197$

$i_{\text{eff}} = (1.69 \cdot 1 \cdot 1.3)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(1.3^3\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1.3 - 1 = 0.3 = 30\%$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{e^{2+x}}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{e^{2+x}} = \sqrt{e^2} = \left(e^2\right)^{1/2} = e^1.$$

[2] (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x + 1}{6\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x + 1}{6\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1 + x^{-2} + x^{-3})}{x^3\cdot(6 - 3\cdot x^{-1} - 2\cdot x^{-2} - x^{-3})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + x^{-2} + x^{-3}}{6 - 3\cdot x^{-1} - 2\cdot x^{-2} - x^{-3}} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Gegeben $f(x) = e^{1-x^2} + x^2$ mit $D(f) = [-1, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 2 \cdot x \cdot (1 - e^{1-x^2})$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extremalpunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x \cdot (1 - e^{1-x^2}) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot x = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - e^{1-x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad e^{1-x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 0 \quad \text{oder } x = 1 \end{aligned}$$

$-1, 0, 1 \in D(f)$, und $0, 1$ keine Randpunkte, aber -1 Randpunkt; also sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ die stationären Stellen.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$$f''(x) = 2 \cdot (1 - e^{1-x^2}) + 2 \cdot x \cdot (-e^{1-x^2}) \cdot (-2 \cdot x) = 2 \cdot (1 - e^{1-x^2}) + 4 \cdot x^2 \cdot e^{1-x^2}$$

$f''(0) = 2 \cdot (1 - e^1) = 2 \cdot (e^0 - e^1) < 0$, da Exponentialfunktion streng monoton wachsend. Also $x_1 = 0$ lokale Maximalstelle mit $f(0) = e^1$.

$f''(1) = 2 \cdot (1 - e^0) + 4 \cdot 1 \cdot e^0 = 4 > 0$, also $x_2 = 1$ lokale Minimalstelle mit $f(1) = e^0 + 1 = 2$

[2](b) Untersuchen Sie auf globale **Minimal**punkte (**Minimal**stellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-1) = e^0 + 1 = 2$, $f(2) = e^{1-4} + 4 = e^{-3} + 4$.

Da die Exponentialfunktion nur positive Werte besitzt, ergibt sich $2 < e^{-3} + 4$. Außerdem ist für die Eulersche Zahl e^1 bekannt, dass sie die Ungleichung $e^1 > 2$ erfüllt. Also sind $(-1, 2)$ und $(1, 2)$ die globalen Minimalpunkte.

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} e^{t+2} & \text{für } \ 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{1}{t^2} - 1 & \text{für } \ 1 < t \le 3 \end{cases} .$$

Für $0 \le x \le 3$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [0,1]$.

[4] (b) Berechnen Sie $F(2)$.

Ergebniskontrolle:

(a) Es gilt für $x \in [0,1]$

$$F(x) = \int_0^x e^{t+2}\, dt = \int_0^x e^2 \cdot e^t\, dt = e^2 \cdot \int_0^x e^t\, dt \quad = \quad e^2 \left[e^t\right]_0^x = e^2 \cdot e^x - e^2 = e^{x+2} - e^2.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} F(2) = \int_0^1 e^{t+2}\, dt + \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt \quad &= \quad F(1) + \int_1^2 (t^{-2} - 1)\, dt \\ &= \quad F(1) + \int_1^2 t^{-2}\, dt - \int_1^2 1\, dt \\ &= \quad e^3 - e^2 + \left[-t^{-1}\right]_1^2 - [t]_1^2 \\ &= \quad e^3 - e^2 + \left[-\frac{1}{2} + 1\right] - [2-1] = e^3 - e^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{3/2} \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yx}.

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = \frac{3}{2}\, 3 \cdot x^2 \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{1/2} = \frac{9}{2} \cdot x^2 \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \frac{9}{2}\, 2 \cdot x \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{1/2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{-1/2} \cdot 3 \cdot x^2 \\ &= 9 \cdot x \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{1/2} + \frac{27}{4} \cdot x^4 \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{3}{2} \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{1/2} \cdot 2 \cdot y = 3 \cdot y \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{1/2}$$

$$f''_{yx}(x,y) = 3 \cdot y \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{-1/2} \cdot 3 \cdot x^2 = \frac{9}{2} \cdot x^2 \cdot y \cdot \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{-1/2}$$

[5] Betrachten Sie die Nachfragefunktion $f(x,y) = 12 \cdot x^{-1/4} \cdot y^{1/3}$ eines Produktes mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommensselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 8% erhöht und das Einkommen um 3% steigt.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(10,50) = 10 \cdot \frac{f_x'(10,50)}{f(10,50)}$ und $\mathcal{E}_y^f(10,50) = 50 \cdot \frac{f_y'(10,50)}{f(10,50)}$ mit

$$f_x'(x,y) = -3 \cdot x^{-5/4} \cdot y^{1/3} \text{ und } f_y'(x,y) = 4 \cdot x^{-1/4} \cdot y^{-2/3}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 50)$

$$\mathcal{E}_x^f(10,50) = 10 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-5/4} \cdot 50^{1/3}}{12 \cdot 10^{1/4} \cdot 50^{1/3}} = \frac{-3 \cdot 10^{-1/4} \cdot 50^{1/3}}{12 \cdot 10^{-1/4} \cdot 50^{1/3}} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(10,50) = 50 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-1/4} \cdot 50^{-2/3}}{12 \cdot 10^{-1/4} \cdot 50^{1/3}} = \frac{4 \cdot 10^{-1/4} \cdot 50^{1/3}}{12 \cdot 10^{1/4} \cdot 50^{1/3}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(10,50) \cdot \frac{dx}{10} + \mathcal{E}_y^f(10,50) \cdot \frac{dy}{50} = -\frac{1}{4} \cdot 8\% + \frac{1}{3} \cdot 3\% = -1\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(10,50)$ zu $f(10.8, 51.5)$ beträgt ca. -1%.

[7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x,y) = x^3 \cdot e^{y+2} \qquad\qquad (x > 0, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + y = 1$. (Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = x + y - 1 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = x^3 \cdot e^{y+2} + \lambda \cdot \big(x + y - 1\big)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2}$ und $f'_y(x,y) = x^3 \cdot e^{y+2}$
  - $b'_x(x,y) = 1$ und $b'_y(x,y) = 1$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} + \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = x^3 \cdot e^{y+2} + \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = x + y - 1$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} + \lambda & = & 0 \\ x^3 \cdot e^{y+2} + \lambda & = & 0 \\ x + y - 1 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & -3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} \\ x^3 \cdot e^{y+2} - 3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} & = & 0 \\ x + y - 1 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & -3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} \\ x^2 \cdot e^{y+2} \cdot (x-3) & = & 0 \\ x + y - 1 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & -3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} \\ x^2 \cdot (x-3) & = & 0 \\ x + y - 1 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcc} \lambda & = & -3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} \\ x & = & 0 \qquad \text{oder} \quad x = 3 \\ y & = & 1 - x \end{array}\right\}$$

Also ist $(0,1,0)$ und $(3,-2,-27)$ die Lösungen des Gleichungssystems. Außerdem $(3,-2) \in D(f)$, aber $(0,1)$ ist kein Element von $D(f)$. Daher ist $P1 = (3,-2)$ der einzige bedingt stationäre Punkt.

- Zur Berechnung des Wertes von $D(3,-2,-27)$
  - $f''_{xx}(x,y) = 6 \cdot x \cdot e^{y+2}, f''_{yy}(x,y) = x^3 \cdot e^{y+2}, f''_{xy}(x,y) = 3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2}$
  - $b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = 0.$
- Berechnung des Wertes von $D(3,-2,-27)$

$$\begin{aligned} D(3,-2,-27) &= (f''_{xx}(3,-2)+0)\cdot 1^2 - 2\cdot(f''_{xy}(3,-2)+0)\cdot 1\cdot 1 + (f''_{yy}(3,-2)+0)\cdot 1^2 \\ &= 6\cdot 3\cdot e^0 - 2\cdot 3\cdot 9\cdot e^0 + 27\cdot e^0 = 18 - 27 = -9. \end{aligned}$$

$D(3,-2,-27) < 0$, also ist $(3,-2)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $x+y=1$ mit Funktionswert $f(3,-2) = 27 \cdot e^0 = 27$.