

Klausur Mathematik für Ökonomen

06.02.2024, 10:30-12:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.  
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone, Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,  
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe  
kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.  
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

**Platznummer**

**Matrikelnummer**

**Name**

**Vorname**

**Geburtsdatum** \_\_\_\_\_

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

**Unterschrift** \_\_\_\_\_

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.  
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

---

Einträge der Klausuraufsicht:

Unterbrechungen

Abgabe

Korrekturabschnitt!

**Thema: Lineare Ungleichungssysteme**

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1)  $2 \cdot y - 2 \cdot x \leq 2$

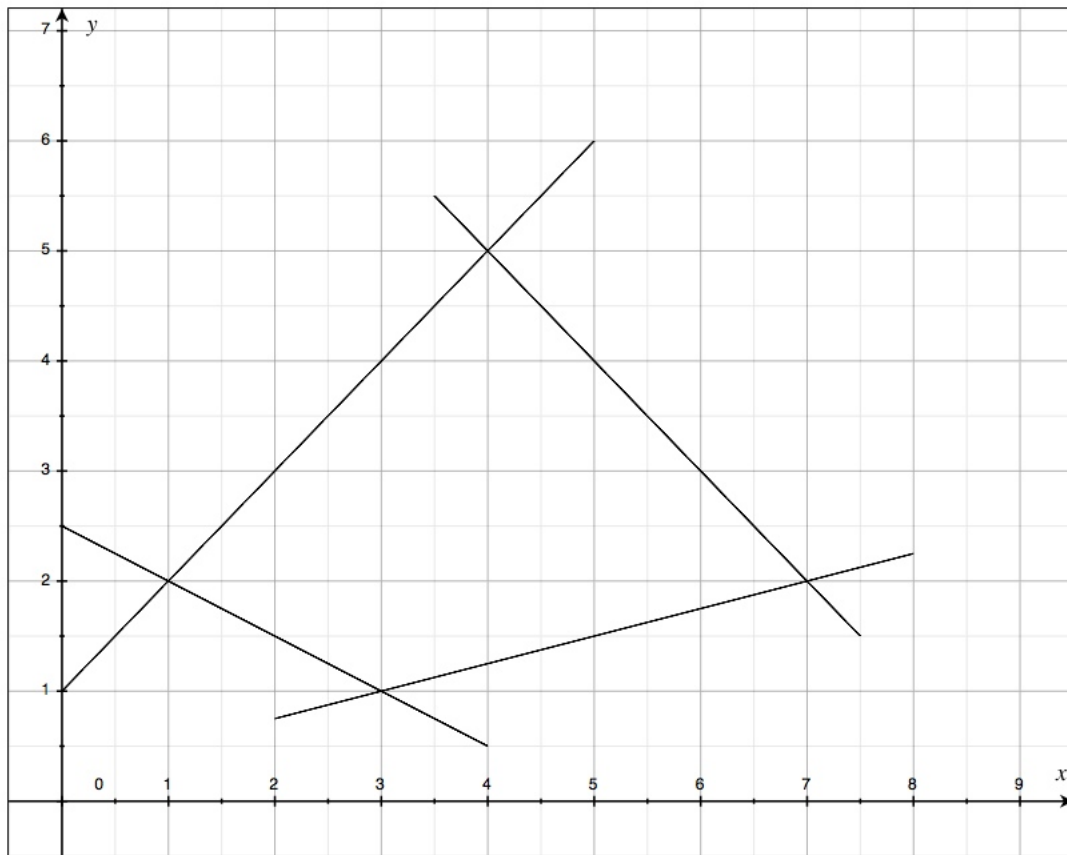
(2)  $2 \cdot y + x \geq 5$

(3)  $2 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x \geq \frac{1}{2}$

(4)  $y + x \leq 9$

**Ergebniskontrolle:**

$$L = \left\{ (x, y) : y \leq 1 + x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \leq 9 - x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

**Thema: Rechnen mit Matrizen**

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} ; C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

(a)  $(A \cdot B) + C$

(b)  $D^{-1}$  für  $D = C \cdot B$

**Ergebniskontrolle:**

(a)  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} ; (A \cdot B) + C = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 12 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ .

(b) Die Matrix  $D$  ist eine  $2 \times 3$ -Matrix, insbesondere ist  $D$  keine quadratische Matrix. Daher ist  $D^{-1}$  nicht definiert.

**Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus**

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge  $L_b$  des zugehörigen linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ .

$$\begin{array}{cccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\
 \hline
 1 & 3 & -1 & 1 & 9 \\
 4 & 3 & 5 & 4 & 36 \\
 1 & 9 & -3 & 7 & 45
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan} \dots}
 \begin{array}{cccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & -2 & -9 \\
 0 & 1 & 0 & 3/2 & 9 \\
 0 & 0 & 1 & 3/2 & 9
 \end{array}$$

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei  $Y$  unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}}_A \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

- (i) Welche Dimension besitzt  $Y$ ?
- (ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus die allgemeine Lösung für  $Y$ .

**Ergebniskontrolle:**

(a) Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 = -9 + 2 \cdot x_4 \\ x_2 = 9 - \frac{3}{2} \cdot x_4 \\ x_3 = 9 - \frac{3}{2} \cdot x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

(b) zu (i):

$A_{2 \times 3} \cdot Y_{m \times n} = B_{2 \times 3}$ , also  $m = 3$  und  $n = 3$ . Die Matrix  $Y$  besitzt 3 Zeilen und 3 Spalten.

zu (ii):

**Ansatz:** Tabellenform

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | Protokoll |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| 1     | 3     | 3     | 1     | 0     | 2     | I         |
| 1     | 9     | -3    | 0     | 1     | -1    | II        |

**Lösung:** nach Durchführung des Gauß-Jordan Algorithmus

**Lösungsmatrix**

$$Y = \begin{pmatrix} (3/2 - 6 \cdot a) & (-1/2 - 6 \cdot b) & (7/2 - 6 \cdot c) \\ (-1/6 + a) & (1/6 + b) & (-1/2 + c) \\ a & b & c \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

**Thema: Zinsrechnung**

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert  $K_0 > 0$ .

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit  $n = 3$ . Wie hoch ist die erforderliche Rendite  $i = p\%$ , damit der Zielwert  $K_3$  um 50% über dem Anfangswert  $K_0$  liegt?
- [2] (b) Gegeben:  $i = 10\%$  und ein Zielwert  $K_x$ , der 50% über dem Anfangswert  $K_0$  liegt. Erforderliche Laufzeit  $n = ?$   
(d.h. mit der  $n$ -ten Verzinsung soll  $K_n$  erstmals die Bedingung  $K_n \geq K_x$  erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit  $n = 3$  und Zinsstaffel 69%, 0%, 30%. Berechnen Sie den Zielwert  $K_3$  bei einem Anfangswert von  $K_0 = 1000$  und den effektiven Zinssatz  $i_{\text{eff}}$ .

Hilfswerte:  $1.5^{\frac{1}{3}} \approx 1.14$ ,  $\ln 1.1 \approx 0.1$ ,  $\ln 1.5 \approx 0.41$ ,  $13^3 = 2197$ ,  $\ln 2.5 \approx 0.92$

**Ergebniskontrolle:**

$$(a) K_3 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{3}} \approx 1.14 \Leftrightarrow i = 0.14 = 14\%$$

$$(b) K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.41}{0.1} = \frac{41}{10}; n = \lceil x \rceil = 5$$

$$(c) K_3 = (1.69 \cdot 1 \cdot 1.3) \cdot 1000 = 169 \cdot 13 = 13^3 = 2197$$

$$i_{\text{eff}} = (1.69 \cdot 1 \cdot 1.3)^{\frac{1}{3}} - 1 = (1.3^3)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1.3 - 1 = 0.3 = 30\%$$

**Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen**

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{e^{2+x}}$

**Ergebniskontrolle:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{e^{2+x}} = \dots = e^1.$$

[2] (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{6 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}$

**Ergebniskontrolle:**

**Ansatz:** höchste Nennerpotenz ausklammern

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{6 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{-2} + x^{-3}}{6 - 3 \cdot x^{-1} - 2 \cdot x^{-2} - x^{-3}} = \frac{1}{6}.$$

**Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen**

Gegeben  $f(x) = e^{1-x^2} + x^2$  mit  $D(f) = [-1, 2]$ . **Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!**  
 $f$  hat die Ableitung  $f'(x) = 2 \cdot x \cdot (1 - e^{1-x^2})$ .

- [4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extrempunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von  $f$  über dem Definitionsbereich.

**Ergebniskontrolle:**

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot x \cdot (1 - e^{1-x^2}) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - e^{1-x^2} = 0 \\ &\dots \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 1 \end{aligned}$$

$-1, 0, 1 \in D(f)$ , und  $0, 1$  keine Randpunkte, aber  $-1$  Randpunkt; also sind  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$  die stationären Stellen.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von  $f''(x)$

$$f''(x) = \dots = 2 \cdot (1 - e^{1-x^2}) + 4 \cdot x^2 \cdot e^{1-x^2}$$

$f''(0) = 2 \cdot (1 - e^1) = 2 \cdot (e^0 - e^1) < 0$ , da Exponentialfunktion streng monoton wachsend.  
 Also  $x_1 = 0$  lokale Maximalstelle mit  $f(0) = e^1$ .

$f''(1) = 2 \cdot (1 - e^0) + 4 \cdot 1 \cdot e^0 = 4 > 0$ , also  $x_2 = 1$  lokale Minimalstelle mit  $f(1) = e^0 + 1 = 2$

- [2](b) Untersuchen Sie auf globale **Minimalpunkte** (**Minimalstellen** und zugehörige Funktionswerte) von  $f$  über dem Definitionsbereich.

**Ergebniskontrolle:**

$$f(-1) = \dots = 2, \quad f(2) = \dots = e^{-3} + 4.$$

Da die Exponentialfunktion nur positive Werte besitzt, ergibt sich  $2 < e^{-3} + 4$ . Außerdem ist für die Eulersche Zahl  $e^1$  bekannt, dass sie die Ungleichung  $e^1 > 2$  erfüllt. Also sind  $(-1, 2)$  und  $(1, 2)$  die globalen Minimalpunkte.

**Thema: Elementare Berechnung von Integralen**

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(t) = \begin{cases} e^{t+2} & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{t^2} - 1 & \text{für } 1 < t \leq 3 \end{cases} .$$

Für  $0 \leq x \leq 3$  sei die Funktion  $F$  definiert durch  $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ .

[2] (a) Berechnen Sie  $F(x)$  für  $x \in [0, 1]$ .

[4] (b) Berechnen Sie  $F(2)$ .

**Ergebniskontrolle:**

(a) Es gilt für  $x \in [0, 1]$

$$F(x) = \int_0^x e^{t+2} dt = \dots = e^{x+2} - e^2.$$

(b) Es gilt

$$F(2) = \int_0^1 e^{t+2} dt + \int_1^2 \left( \frac{1}{t^2} - 1 \right) dt = F(1) + \int_1^2 (t^{-2} - 1) dt = \dots = e^3 - e^2 - \frac{1}{2}.$$

**Thema: Partielle Ableitungen**

- [4] Berechnen Sie für die Funktion  $f(x, y) = (x^3 + y^2 + 1)^{3/2}$  ( $x > 0, y > 0$ ) die partiellen Ableitungen  $f'_x, f'_y$ , sowie  $f''_{xx}, f''_{yx}$ .

**Ergebniskontrolle:**

$$f'_x(x, y) = \dots = \frac{9}{2} \cdot x^2 \cdot (x^3 + y^2 + 1)^{1/2}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \dots = 9 \cdot x \cdot (x^3 + y^2 + 1)^{1/2} + \frac{27}{4} \cdot x^4 \cdot (x^3 + y^2 + 1)^{-1/2}$$

$$f'_y(x, y) = \dots = 3 \cdot y \cdot (x^3 + y^2 + 1)^{1/2}$$

$$f''_{yx}(x, y) = \dots = \frac{9}{2} \cdot x^2 \cdot y \cdot (x^3 + y^2 + 1)^{-1/2}$$

**Thema: Partielle und totale Marginalanalyse**

[5] Betrachten Sie die Nachfragefunktion  $f(x, y) = 12 \cdot x^{-1/4} \cdot y^{1/3}$  eines Produktes mit Preis  $x > 0$  und mittlerem Einkommen  $y > 0$ . Weiterhin sei die Basisstelle  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 = 10$  und  $y_0 = 50$  vorgegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Preiselastizität  $\mathcal{E}_x^f$  und die Einkommenselastizität  $\mathcal{E}_y^f$  an der obigen Basisstelle.
- (b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion  $f$  an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 8% erhöht und das Einkommen um 3% steigt.

**Ergebniskontrolle:**

(a)  $\mathcal{E}_x^f(10, 50) = 10 \cdot \frac{f'_x(10, 50)}{f(10, 50)}$  und  $\mathcal{E}_y^f(10, 50) = 50 \cdot \frac{f'_y(10, 50)}{f(10, 50)}$  mit

$$f'_x(x, y) = -3 \cdot x^{-5/4} \cdot y^{1/3} \text{ und } f'_y(x, y) = 4 \cdot x^{-1/4} \cdot y^{-2/3}.$$

Also gilt an der Basisstelle  $(x_0, y_0) = (10, 50)$

$$\mathcal{E}_x^f(10, 50) = \dots = -\frac{1}{4}$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(10, 50) = \dots = \frac{1}{3}.$$

(b)  $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(10, 50) \cdot \frac{dx}{10} + \mathcal{E}_y^f(10, 50) \cdot \frac{dy}{50} = -\frac{1}{4} \cdot 8\% + \frac{1}{3} \cdot 3\% = -1\%$

d.h. die relative Veränderung von  $f(10, 50)$  zu  $f(10.8, 51.5)$  beträgt ca.  $-1\%$ .

**Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)**

[7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x, y) = x^3 \cdot e^{y+2} \quad (x > 0, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung  $x + y = 1$ . (Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrange-funktion

**Formel für die berandete Hesse-Determinante:**

$$\begin{aligned} D(x, y, \lambda) \\ := & (f''_{xx}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x, y)) \cdot (b'_y(x, y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x, y)) \cdot b'_x(x, y) \cdot b'_y(x, y) \\ & + (f''_{yy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x, y)) \cdot (b'_x(x, y))^2 \end{aligned}$$

**Ergebniskontrolle:**

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form  
 $b(x, y) = x + y - 1 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion  
 $L(x, y, \lambda) = x^3 \cdot e^{y+2} + \lambda \cdot (x + y - 1)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x, y) = 3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2}$  und  $f'_y(x, y) = x^3 \cdot e^{y+2}$
  - $b'_x(x, y) = 1$  und  $b'_y(x, y) = 1$
  - $L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda \cdot b'_x(x, y) = 3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} + \lambda$
  - $L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda \cdot b'_y(x, y) = x^3 \cdot e^{y+2} + \lambda$
  - $L'_\lambda(x, y, \lambda) = b(x, y) = x + y - 1$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} \\ x^2 \cdot e^{y+2} \cdot (x - 3) = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} \\ x^2 \cdot (x - 3) = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2} \\ x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 3 \\ y = 1 - x \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Also ist  $(0, 1, 0)$  und  $(3, -2, -27)$  die Lösungen des Gleichungssystems. Außerdem  $(3, -2) \in D(f)$ , aber  $(0, 1)$  ist kein Element von  $D(f)$ . Daher ist  $P1 = (3, -2)$  der einzige bedingt stationäre Punkt.

- Zur Berechnung des Wertes von  $D(3, -2, -27)$

- $f''_{xx}(x, y) = 6 \cdot x \cdot e^{y+2}$ ,  $f''_{yy}(x, y) = x^3 \cdot e^{y+2}$ ,  $f''_{xy}(x, y) = 3 \cdot x^2 \cdot e^{y+2}$

- $b''_{xx}(x, y) = b''_{yy}(x, y) = b''_{xy}(x, y) = b''_{yx}(x, y) = 0$ .

- Berechnung des Wertes von  $D(3, -2, -27)$

$$D(3, -2, -27) = \dots = -9.$$

$D(3, -2, -27) < 0$ , also ist  $(3, -2)$  eine lokale Maximalstelle von  $f$  unter der Nebenbedingung  $x + y = 1$  mit Funktionswert  $f(3, -2) = 27 \cdot e^0 = 27$ .