Mathematik für Ökonomen – WS 2023/24 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

06.02.2024, 10:30-12:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone**, **Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrekturabschnitt!

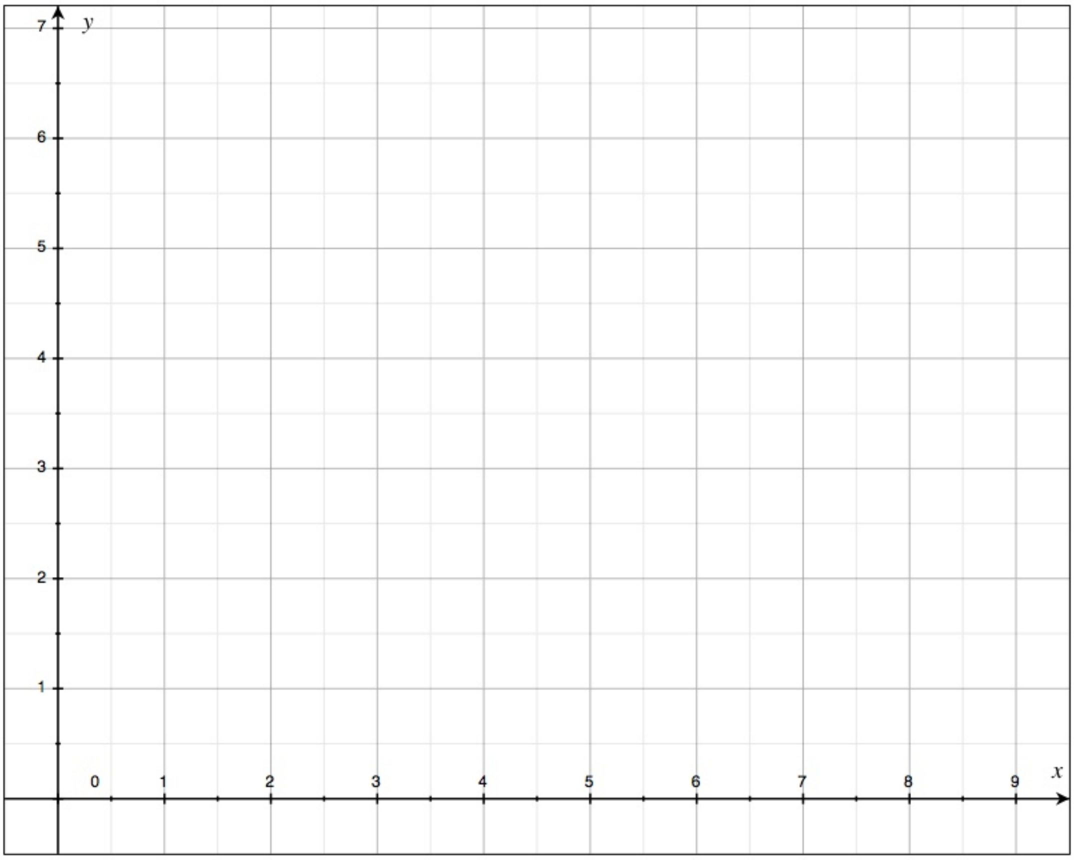
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y \; - \; 2 \cdot x \; \leq \; 2$

(2) $2 \cdot y \; + \; x \geq \; 5$

(3) $2 \cdot y \; - \frac{1}{2} \cdot x \geq \; \frac{1}{2}$

(4) $y + x \leq 9$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

(a) $(A \cdot B) + C$

(b) D^{-1} für $D = C \cdot B$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	3	-1	1	9
4	3	5	4	36
1	9	-3	7	45

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	b^*
1	0	0	-2	- 9
0	1	0	3/2	9
0	0	1	3/2	9

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension besitzt Y?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ und Zinsstaffel $69\%, 0\%, 30\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_3 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{3}} \approx 1.14$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $13^3 = 2197$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim_{x \to 0} \sqrt{e^{2+x}}$

[2] (b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x + 1}{6 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}$

Gegeben $f(x) = e^{1-x^2} + x^2$ mit $D(f) = [-1, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 2 \cdot x \cdot (1 - e^{1-x^2})$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extremalpunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale **Minimal**punkte (**Minimal**stellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} e^{t+2} & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{1}{t^2} - 1 & \text{für } 1 < t \le 3 \end{cases} .$$

Für $0 \le x \le 3$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [0,1]$.

[4] (b) Berechnen Sie $F(2)$.

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = \left(x^3 + y^2 + 1\right)^{3/2} \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yx}.

[5] Betrachten Sie die Nachfragefunktion $f(x, y) = 12 \cdot x^{-1/4} \cdot y^{1/3}$ eines Produktes mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommensselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 8% erhöht und das Einkommen um 3% steigt.

[7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x,y) = x^3 \cdot e^{y+2} \qquad\qquad (x > 0, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + y = 1$. (Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$