Mathematik für Ökonomen – WS 2024/25 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. Rene Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

04.02.2025, 10:30-12:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone**, **Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer
Matrikelnummer
Name
Vorname
Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrektur:

Aufg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe	Note
Punkte												
	3	4	6	6	3	6	6	4	5	7	50	
Korr												

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

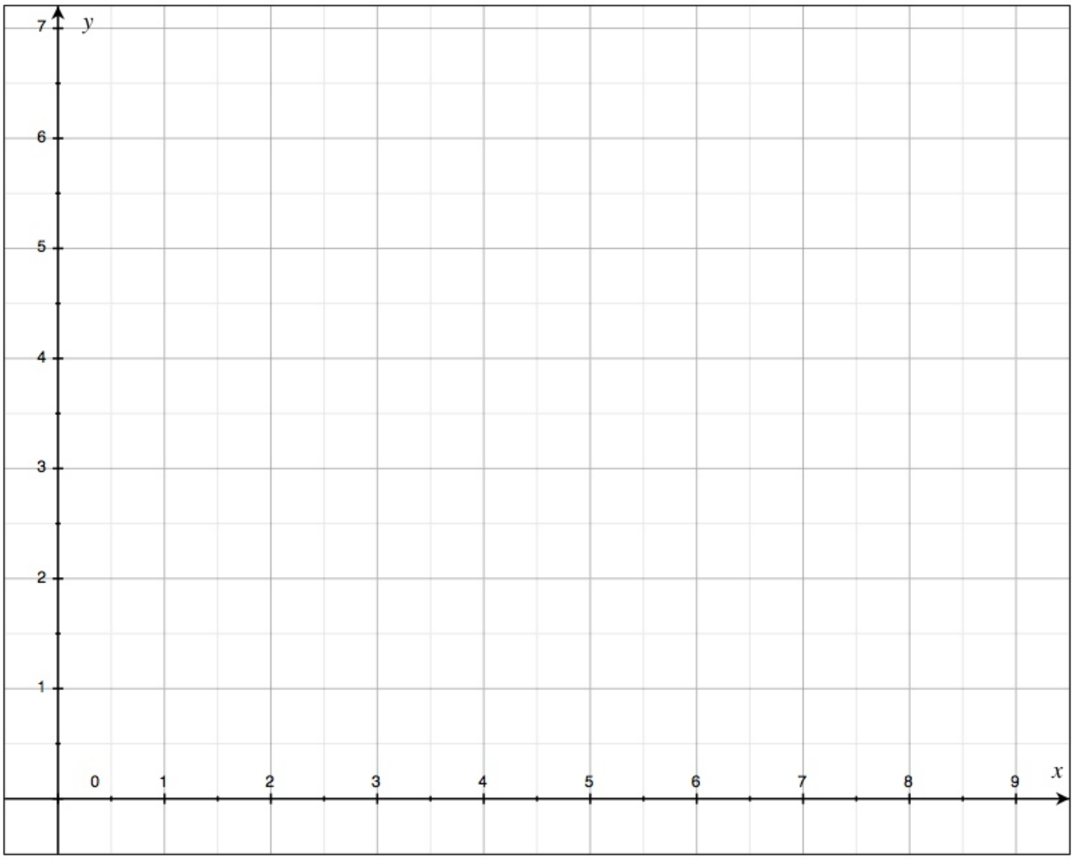
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $x - y \geq -1$

(2) $4 \cdot y - x \geq 1$

(3) $\frac{1}{3} \cdot y + \frac{1}{3} \cdot x \leq 3$

(4) $4 \cdot y + 2 \cdot x \geq 10$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

	Endprodukte		
Zwischenprodukte	E_1	E_2	E_3
Z_1	6	4	8
Z_2	4	2	2
Z_3	2	4	2

	Zwischenprodukte		
Rohstoffe	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	3	1
R_2	1	3	3

Verkaufspreise $p = (p_1, p_2, p_3) = (20, 30, 15)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Verkaufserlöse können hierbei erzielt werden?

Thema: Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus

[3] (a) Bei der Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
3	3	3	3	12
2	3	2	1	5
4	5	4	3	13

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	b^*
1	0	1	2	7
0	1	0	-1	-3
0	0	0	0	0

(i) Bestimmen Sie aus dem Schlußtableau die Lösungsmenge L_b des linearen Gleichungssystems.

(ii) Berechnen Sie den Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des linearen Gleichungssystems, wenn $x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ gewählt wird.

[3] (b) Bestimmen Sie mithilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus die allgemeine Lösung der folgenden Matrixgleichung.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $44\%, 20\%, 0\%, 20\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{4}} \approx 1.11$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $13^4 = 28561$, $144^2 = 20736$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\ln\left(x \cdot e^{3+x}\right)}$

[2] (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 \cdot x^{7/2} + 4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2}{x^4 + 2 \cdot x^3 + 1}$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = (x^2 - 4)^3$ mit $D(f) = [-1, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 6 \cdot x \cdot (x^2 - 4)^2$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extremalpunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Extrempunkte (Extremstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die Funktion $F : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_1^x \left(e^{-t} + 1/t^2\right)\, dt$.

[4] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [1, \infty[$.

[2] (b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \left(e^{-t} + 1/t^2\right)\, dt$.

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = \ln(x^2 \cdot y + 1) \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xy}, f''_{yy}.

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Outputfunktion $f(x, y) = e^{x+3\cdot y^2}$ eines Produktes mit Investitionsgut I $x > 0$ und Investitionsgut II $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 4$ und $y_0 = 2$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Elastizität $\mathcal{E}_x^f$ von Investitionsgut I und die Elastizität $\mathcal{E}_y^f$ von Investitionsgut II an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn dort 5% mehr vom Investitionsgut I und 1% weniger vom Investitionsgut II eingesetzt wird.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x,y) = x^2 \cdot e^y \qquad\qquad (x < 1, y > 0)$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 3$. (Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$