Mathematik für Ökonomen – WS 2016/17 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

14.02.2017, 13:00-15:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $x - 3 \cdot y \leq 0$

(2) $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$

(3) $2 \cdot x \geq 3$

(4) $4 \cdot y + 2 \cdot x \geq 10$

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Endprodukte} \\
 & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\
\text{Zwischenprodukte} \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & \text{Zwischenprodukte} \\
 & \begin{array}{ccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \\
\text{Rohstoffe} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array} & \begin{array}{|ccc|} \hline 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 13 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-1} & \text{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 5% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 3\%$ und ein Zielwert K_x, der 5% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 6$ und Zinsstaffel $0\%, 69\%, 0\%, 30\%, 69\%, 30\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_6 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.05^{\frac{1}{3}} \approx 1.02$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $13^6 = 4826809$, $\ln 1.03 \approx 0.03$

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = -1$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2 + \ln(2+x)}{x^2-5} & \text{für} \quad -2 < x < -1 \\ 0 & \text{für} \quad x = -1 \\ (2+x) \cdot \ln(1+x^2) & \text{für} \quad -1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Gegeben $f(x) = 2 \cdot e^{-(x+1)^2/2}$ mit $D(f) = [-3, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -2 \cdot (x+1) \cdot e^{-(x+1)^2/2}$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_{-3}^{2} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} e^{3+t} & \text{für} \quad -3 \leq t < 0 \\ -e^3 & \text{für} \quad 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{4}{t^2} & \text{für} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x t^{-2} \cdot \ln t \; dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = -1$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = e^{0.005 \cdot x \cdot y}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 20$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Transportkostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% erhöht und die Transportkosten um 8% vermindern.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 8 \cdot x + 12 \cdot y \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y^3 = 10$.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$