Mathematik für Ökonomen – WS 2017/18 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

06.02.2018, 09:30-11:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $-2 \cdot y \quad + \quad \frac{1}{2} \cdot x \quad \leq \quad -\frac{1}{2}$

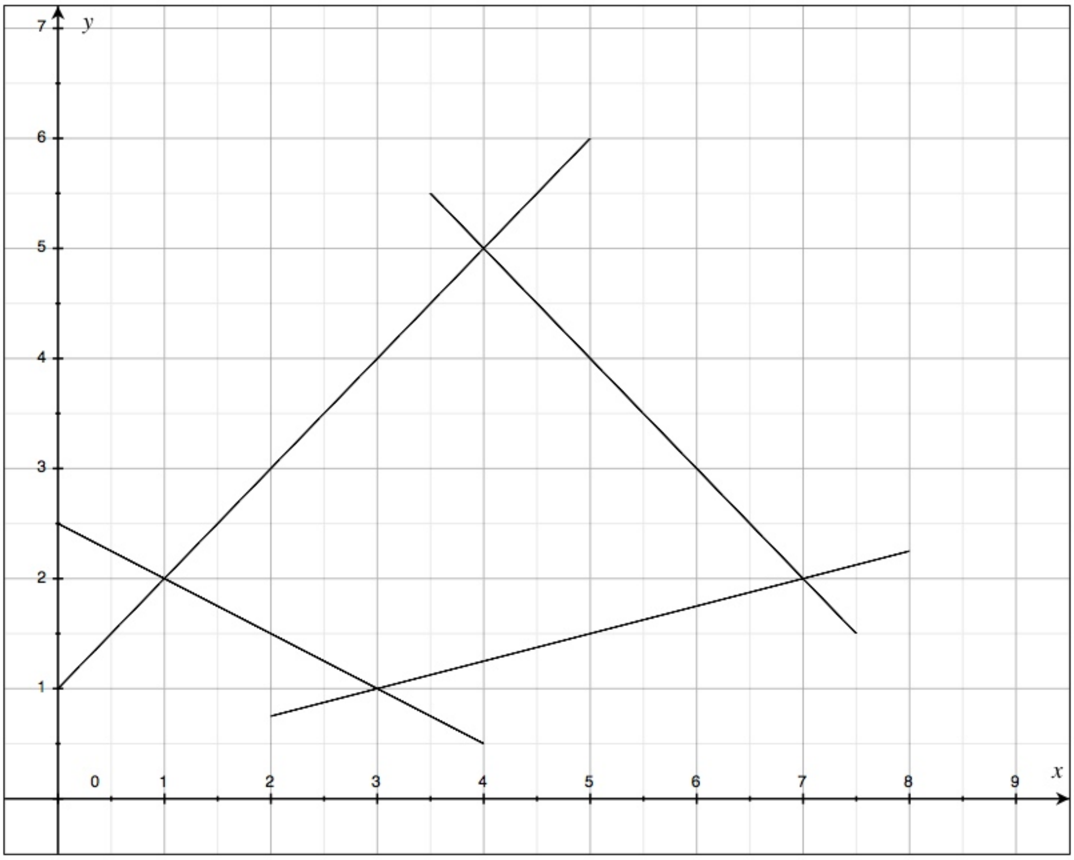
(2) $y \ + \ x \leq \ \ 9$

(3) $\frac{1}{2} \cdot y \quad - \frac{1}{2} \cdot x \leq \quad \frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{4} \cdot x \geq \frac{5}{4}$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x,y) : y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \leq 9 - x \text{ und } y \leq 1 + x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	4	6	2
	Z_2	2	4	2
	Z_3	2	8	4

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	3	2
	R_2	3	2	3

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 34 & 16 \\ 22 & 50 & 22 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 110 \\ 160 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 160 \end{pmatrix} = 650$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	1	3	4
1	0	1	2	1
1	-1	3	5	6
2	-1	2	5	4

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \ldots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	b^*
1	0	0	1	0
0	1	0	-1	-3
0	0	1	1	1
0	0	0	0	-1

[4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

(a) Im Schlußtableau ist die letzte Zeile der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile, aber die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix ist keine Nullzeile. Also besitzt das ursprüngliche LGS keine Lösung, in Symbolen: $L_b = \emptyset$.

(b)

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	e_4	Protokoll
1/2	0	0	0	1	0	0	0	I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	-1	3	-1	0	0	1	0	III
0	1	2	-2	0	0	0	1	IV
1	0	0	0	2	0	0	0	2· I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	-1	3	-1	0	0	1	0	III
0	1	2	-2	0	0	0	1	IV
1	0	0	0	2	0	0	0	I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	0	4	0	0	1	1	0	III + II
0	0	1	-3	0	-1	0	1	IV - II
1	0	0	0	2	0	0	0	I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	(1/4)· III
0	0	1	-3	0	-1	0	1	IV

1	0	0	0	2	0	0	0	I
0	1	0	1	0	3/4	-1/4	0	II - III
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	III
0	0	0	-3	0	-5/4	-1/4	1	IV - III
1	0	0	0	2	0	0	0	I
0	1	0	1	0	3/4	-1/4	0	II
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	III
0	0	0	1	0	5/12	1/12	-1/3	$(-1/3)\cdot$ IV
1	0	0	0	2	0	0	0	I
0	1	0	0	0	1/3	-1/3	1/3	II - IV
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	III
0	0	0	1	0	5/12	1/12	-1/3	IV

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 5/12 & 1/12 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 10$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_{10} um 150% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x, der 150% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $0\%, 40\%, 96\%, 40\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $2.5^{\frac{1}{10}} \approx 1.1$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $196^2 = 38416$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_{10} = 2.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^{10} \Leftrightarrow 1 + i = (2.5)^{\frac{1}{10}} \approx 1.1 \Leftrightarrow i = 0.1 = 10\%$

(b) $K_x = 2.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.05)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2.5)}{\ln(1.05)} \approx \frac{0.92}{0.05} = \frac{92}{5}$; $n = \lceil x \rceil = 19$

(c) $K_4 = (1 \cdot 1.4 \cdot 1.96 \cdot 1.4) \cdot 10000 = 14 \cdot 196 \cdot 14 = 196^2 = 38416$
$i_{\text{eff}} = (1 \cdot 1.4 \cdot 1.96 \cdot 1.4)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.4^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.4 - 1 = 0.4 = 40\%$

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = 2$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x^2} - 1 & \text{für} \quad 1 \leq x < 2 \\ 15 & \text{für} \quad x = 2 \\ \ln(2 \cdot x - 3) + 4 \cdot x^2 - 1 & \text{für} \quad 2 < x \leq 10 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 2: \lim\limits_{x \to 2_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2_-} \left(2^{x^2} - 1\right) = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$

RGW in $x_0 = 2: \lim\limits_{x \to 2_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2_+} \left(\ln(2 \cdot x - 3) + 4 \cdot x^2 - 1\right) = \ln(4-3) + 16 - 1 = \ln(1) + 15 = 15$

FW in x_0 =2: $f(2) = 15$

Also gilt LGW = RGW = FW, und somit ist f stetig in $x_0 = 2$.

Gegeben $f(x) = e^{x-1} \cdot \big(x^2 - 3\big)$ mit $D(f) = [-\sqrt{3}, 3]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^{x-1} \cdot \big(x^2 + 2 \cdot x - 3\big)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{x-1} \cdot \big(x^2 + 2 \cdot x - 3\big) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 \cdot x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{oder} \quad x = -3. \end{aligned}$$

$1 \in D(f)$, $-3 \notin D(f)$, also $x = 1$ einzige stationäre Stelle.

$$f''(x) = e^{x-1} \cdot \big(x^2 + 2 \cdot x - 3\big) + e^{x-1}\big(2 \cdot x + 2\big) = e^{x-1} \cdot \big(x^2 + 4 \cdot x - 1\big)$$

$f''(1) = e^0 \cdot \big(1 + 4 - 1\big) = 4 > 0$, also $x = 1$ lokale Minimalstelle mit $f(1) = -2$

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-\sqrt{3}) = 0$ und $f(3) = e^2 \cdot 6 > 0$, außerdem $(1, -2)$ einzige lokale Extremstelle, daher
-2 minimaler Wert von $f(-\sqrt{3}), f(1), f(3)$, also $(1, -2)$ globaler Minimalpunkt
$e^2 \cdot 6$ maximaler Wert von $f(-\sqrt{3}), f(1), f(3)$, also $(3, e^2 \cdot 6)$ globaler Maximalpunkt

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 4 \cdot e^{2 \cdot t} & \text{für} \ \ 0 \leq t < 1 \\ 4 \cdot t^3 + 3 & \text{für} \ \ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(t)dt &= \int_0^1 4 \cdot e^{2 \cdot t}\ dt + \int_1^2 (4 \cdot t^3 + 3)\ dt \\
&= 4 \cdot \int_0^1 e^{2 \cdot t}\ dt + 4 \cdot \int_1^2 t^3\ dt + 3 \cdot \int_1^2 1\ dt \\
&= 4 \left[e^{2 \cdot t}/2 \right]_0^1 + 4 \cdot \left[t^4/4 \right]_1^2 + 3 \cdot [t]_1^2 \\
&= 4 \left[e^2/2 - e^0/2 \right] + 4 \cdot \left[2^4/4 - 1/4 \right] + 3 \cdot [2 - 1] \\
&= 2 \cdot e^2 - 2 + 15 + 3 = 2 \cdot e^2 + 16
\end{aligned}$$

[4] Für $1/3 \leq x$ sei $F(x) := F(1/3) + \int_{1/3}^{x} t^{-2} \cdot \ln(3 \cdot t)\ dt$, wobei $F(0)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1/3) = -3$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:

Mit $f(t) = \ln(3 \cdot t)$, $g'(t) = t^{-2}$ ist $f'(t) = 1/t$ und $g(t) = -t^{-1}$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= -3 + \int\limits_{1/3}^{x} t^{-2} \cdot \ln(3 \cdot t)\ dt \\
&= -3 + \left[-t^{-1} \cdot \ln(3 \cdot t)\right]_{1/3}^{x} - \int_{1/3}^{x} (-t^{-1} \cdot t^{-1}\ dt \\
&= -3 + \left[-t^{-1} \cdot \ln(3 \cdot t)\right]_{1/3}^{x} + \int_{1/3}^{x} t^{-2}\ dt \\
&= -3 + [-\ln(3 \cdot x)/x - 0] + \left[-t^{-1}\right]_{1/3}^{x} \\
&= -3 - \ln(3 \cdot x)/x + \left[-x^{-1} + 3\right] \\
&= -\ln(3 \cdot x)/x - 1/x
\end{aligned}$$

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = e^{0.005\cdot x^2+0.001\cdot x\cdot y}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Transportkostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% vermindert und die Transportkosten um 10% erhöhen.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(10,50) = 10 \cdot \frac{f'_x(10,50)}{f(10,50)}$ und $\mathcal{E}_y^f(10,50) = 50 \cdot \frac{f'_y(10,50)}{f(10,50)}$ mit

$$f'_x(x,y) = e^{0.005\cdot x^2+0.001\cdot x\cdot y} \cdot \big(0.01 \cdot x + 0.001 \cdot y\big) \text{ und } f'_y(x,y) = e^{0.005\cdot x^2+0.001\cdot x\cdot y} \cdot 0.001 \cdot x.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 50)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = 10 \cdot \frac{e^{0.005\cdot 100+0.001\cdot 10\cdot 50} \cdot \big(0.01 \cdot 10 + 0.001 \cdot 50\big)}{e^{0.005\cdot 100+0.001\cdot 10\cdot 50}} = 10 \cdot (0.1 + 0.05) = 1.5$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = 50 \cdot \frac{e^{0.005\cdot 100+0.001\cdot 10\cdot 50} \cdot 0.001 \cdot 10}{e^{0.005\cdot 100+0.001\cdot 10\cdot 50}} = 50 \cdot 0.001 \cdot 10 = 0.5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 1.5 \cdot (-2)\% + 0.5 \cdot 10\% = 2\%$

d.h. eine 2% Verminderung des Rohstoffpreises bei gleichzeitiger 10% Erhöhung der Transportkosten führt zu einer ungefähr 2% Erhöhung der Herstellungskosten.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 9 \cdot x + y^3 + 15 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + 3 \cdot y = 6$.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = x + 3 \cdot y - 6 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 9 \cdot x + y^3 + 15 + \lambda \cdot (x + 3 \cdot y - 6)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 9$ und $f'_y(x,y) = 3 \cdot y^2$
  - $b'_x(x,y) = 1$ und $b'_y(x,y) = 3$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 9 + \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 3 \cdot y^2 + 3 \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = x + 3 \cdot y - 6$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 9 + \lambda & = & 0 \\ 3 \cdot y^2 + 3 \cdot \lambda & = & 0 \\ x + 3 \cdot y - 6 & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & -9 \\ 3 \cdot y^2 - 27 & = & 0 \\ x + 3 \cdot y - 6 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & -9 \\ y^2 & = & 9 \\ x & = & 6 - 3 \cdot y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda & = & -9 & & & & \\ y & = & -3 & \text{oder} & y & = & 3 \\ x & = & 6 - 3 \cdot y & & & & \end{array} \right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (15, -3), P2 = (-3, 3)$ mit $\lambda = -9$
- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0:
  - $f''_{xx}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0$
  - $f''_{yy}(x,y) = 6 \cdot y$
  - $b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = 0$.
- Berechnung der Werte von (x_0, y_0, λ_0) für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(15, -3, -9) = 0 - 2 \cdot 0 - 18 = -18 < 0 \Rightarrow (15, -3)$ ist eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $x + 3 \cdot y = 6$ mit Funktionswert $f(15, -3) = 123$.
  - $D_0(-3, 3, -9) = 0 - 2 \cdot 0 + 18 = 18 > 0 \Rightarrow (-3, 3)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $x + 3 \cdot y = 6$ mit Funktionswert $f(-3, 3) = 15$.