Mathematik für Ökonomen – WS 2022/23 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. Rene Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen A

07.02.2023, 09:00-11:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

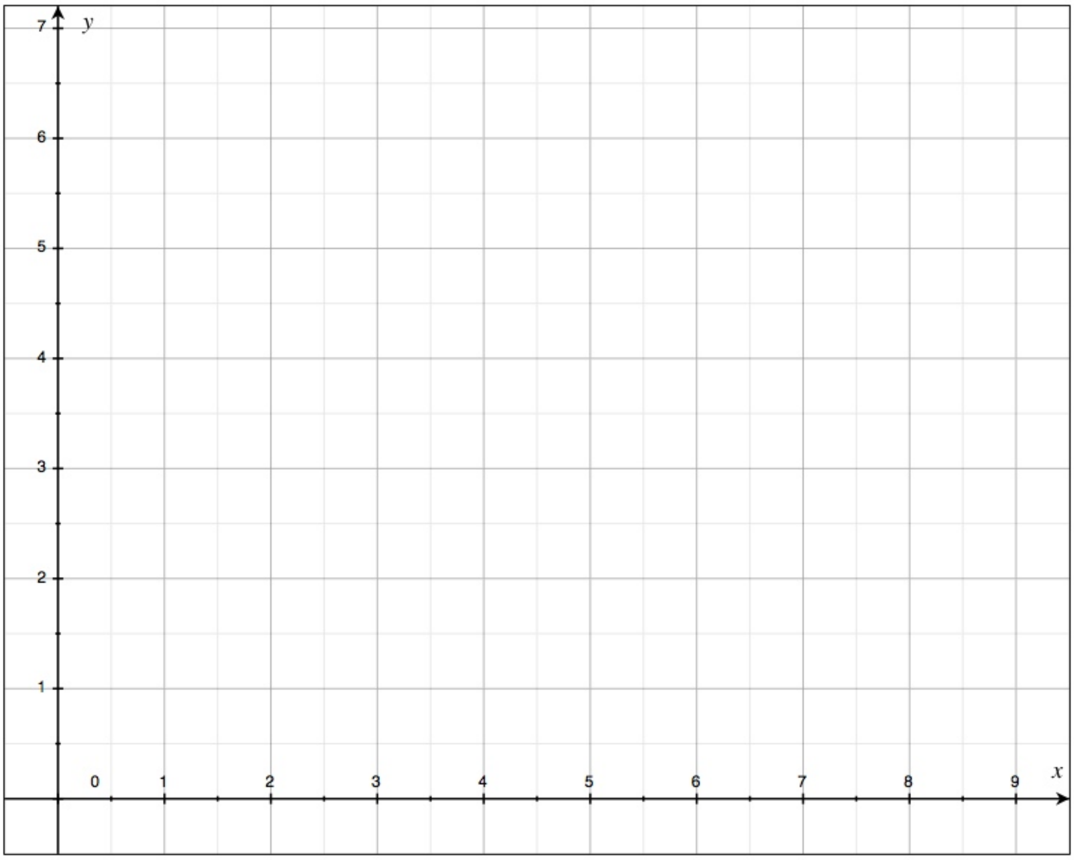
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y \;-\; 2 \cdot x \;\leq\; 2$

(2) $2 \cdot y \;+\; x \geq \;5$

(3) $-2 \cdot y \;+ \frac{1}{2} \cdot x \leq \; -\frac{1}{2}$

(4) $y + x \leq 9$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[5] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	3	1	2
	R_2	1	2	1

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	2	2
	Z_2	1	2	2
	Z_3	1	0	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Wieviele Einheiten von Rohstoff R_2 werden zur Herstellung von 1 Einheit des Endproduktes E_3 benötigt?

(c) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[3] (a) Bei Anwendung Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 13 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

(ii) Berechnen Sie den Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des linearen Gleichungssystems, bei Wahl von $x_3 = x_4 = 1$.

[6] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension muß Y besitzen?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

(iii) Wie ändert sich die allgemeine Lösung Y, wenn in obiger Matrixgleichung in den Matrizen A und B jeweils alle Elemente halbiert werden. Begründen Sie bitte Ihre Aussage.

(iv) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Matrix-Gleichung $X \cdot A^T = B^T$.

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 25% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 3\%$ und ein Zielwert K_x, der 25% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ und Zinsstaffel $10\%, 21\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_3 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.25^{\frac{1}{3}} \approx 1.08$, $\ln 1.03 \approx 0.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $11^3 = 1331$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x\to -4} \left(x^2 + 5 \cdot x + 12\right)^{4/3}$

[1] (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

[2] (c) $\lim\limits_{x\to 1/2} e^{|\ln x|}$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = (2 \cdot x + 1)^{5/2} - 40 \cdot x$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 5 \cdot (2 \cdot x + 1)^{3/2} - 40$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Thema: Partielle Ableitungen

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = \ln\left(x \cdot y + x^2 + y\right) \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{yx}.

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Die Gesamtnachfrage eines Gutes im EU-Wirtschaftraum sei modelliert durch die Funktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{-2/3} \cdot y^{3/4}$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 40$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 3% vermindert und das mittlere Einkommen um 2% erhöht.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $f(x, y) = 2 \cdot x^2 + y^2$ eines Unternehmens in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode diese Funktion auf (lokale) Extremwerte unter der Erlösbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y = 12$.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x, y, \lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x, y)) \cdot (b'_y(x, y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x, y)) \cdot b'_x(x, y) \cdot b'_y(x, y) \\ & + (f''_{yy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x, y)) \cdot (b'_x(x, y))^2 \end{aligned}$$