Mathematik für Ökonomen – WS 2022/23 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. Rene Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen B

07.02.2023, 12:00-14:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer
Matrikelnummer
Name
Vorname
Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $-2 \cdot y \; + \frac{1}{2} \cdot x \leq \; -\frac{1}{2}$

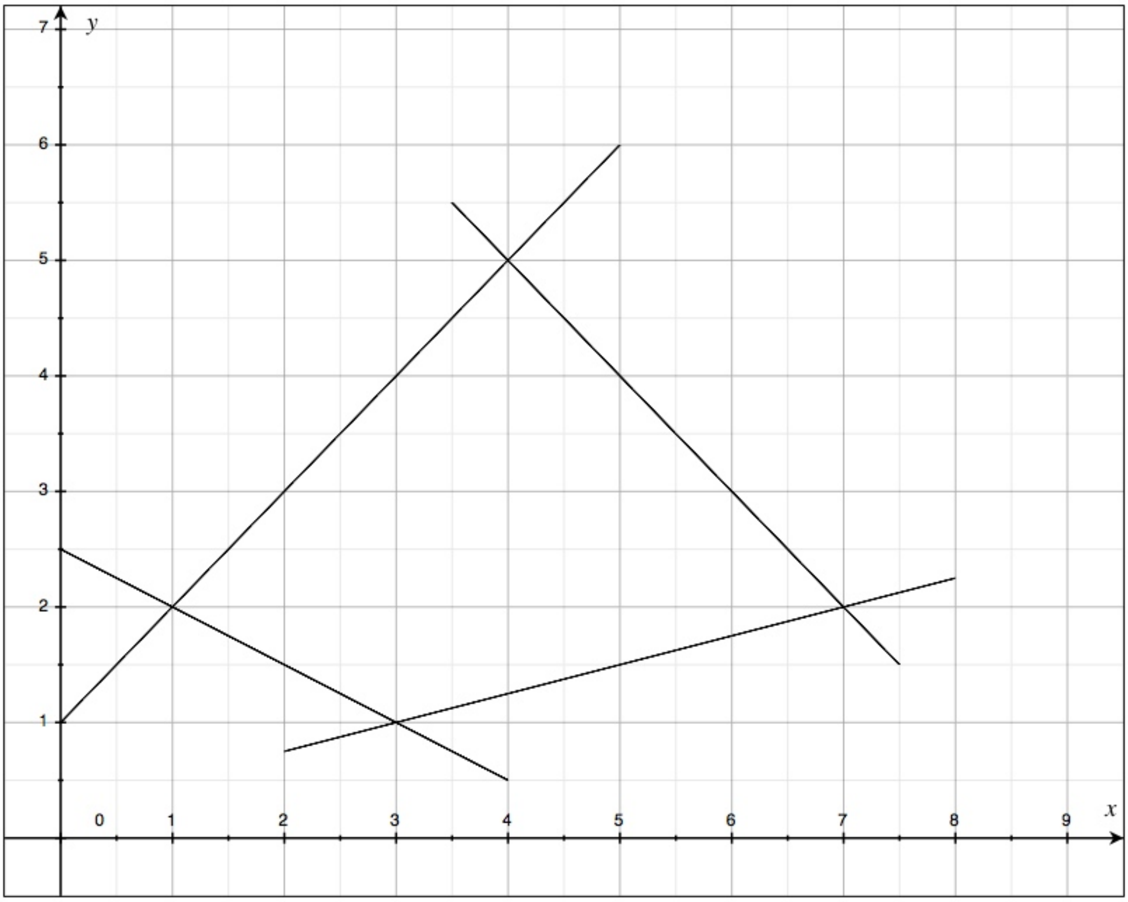
(2) $2 \cdot y \; + \; x \geq \; 5$

(3) $3 \cdot y \; - \; 3 \cdot x \; \leq \; 3$

(4) $y + x \leq 9$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x,y) : y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } y \leq 1 + x \text{ und } y \leq 9 - x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[5] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Zwischenprodukte Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	3	1	2
	R_2	1	2	1

		Endprodukte E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	2	2
	Z_2	1	2	2
	Z_3	1	0	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Wieviele Einheiten von Rohstoff R_2 werden zur Herstellung von 1 Einheit des Endproduktes E_1 benötigt?

(c) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

(b) Der Bedarf an Rohstoff R_2 für eine Einheit von Endprodukt E_1 entspricht dem Matrixelement von M_{RE} in der zweiten Zeile und ersten Spalte, also werden 4 Einheiten von Rohstoff R_2 für 1 Einheit von E_1 benötigt.

(c) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 46 \\ 32 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 32 \end{pmatrix} = 92 + 96 = 188$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[3] (a) Bei Anwendung Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 8 & 10 & 26 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

(ii) Berechnen Sie den Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des linearen Gleichungssystems, bei Wahl von $x_3 = 2$ und $x_4 = 1$.

[6] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension muß Y besitzen?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

(iii) Wie ändert sich die allgemeine Lösung Y, wenn die obige Matrixgleichung ersetzt wird durch die Matrixgleichung $(E_{2\times2} \cdot A) \cdot Y = E_{2\times2} \cdot B$. Begründen Sie bitte Ihre Aussage.

(iv) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Matrix-Gleichung $X \cdot A^T = B^T$.

Ergebniskontrolle:

(a) zu (i):

Beim LGS $Ax = b$ sind 2 Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{array}{rclcll} x_1 & = & 1 & - & x_3 & -2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & 3 & & + & x_4 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & & \end{array} \right\}$$

zu (ii):

Aus Teil (i) ergibt sich für $x_3 = 2$ und $x_4 = 1$

$$x_1 = 1 - x_3 - 2 \cdot x_4 = 1 - 2 - 2 = -3 \text{ und } x_2 = 3 + x_4 = 3 + 1 = 4.$$

D.h. in diesem Falle ist $(-3, 4, 2, 1)^T$ der entsprechende Lösungsvektor.

(b) zu (i):

Y ist eine Matrix mit 3 Zeilen und 2 Spalten.

zu (ii):

y_1	y_2	y_3	b_1	b_2	Protokoll
6	6	12	6	6	I
8	-2	4	-4	4	II
1	1	2	1	1	1/6 I
8	-2	4	-4	4	II
1	1	2	1	1	I
0	-10	-12	-12	- 4	II - 8 I
1	1	2	1	1	I
0	1	6/5	6/5	2/5	(-1/10) II
1	0	4/5	-1/5	3/5	I - II
0	1	6/5	6/5	2/5	

Lösung Y von $A \cdot Y = B$ spaltenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \{(-1/5 - 4/5\ x_3, 6/5 - 6/5\ x_3, x_3)^T :\ x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{L}_2 = \{(3/5 - 4/5\ x_3, 2/5 - 6/5\ x_3, x_3)^T :\ x_3 \in \mathbb{R}\},$$

wobei die x_3 in $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} (-1/5 - 4/5\ a) & (3/5 - 4/5\ b) \\ (6/5 - 6/5\ a) & (2/5 - 6/5\ b) \\ a & b \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

zu (iii):
es gilt $E_{2\times 2} \cdot A = A$ und $E_{2\times 2} \cdot B = B$. D.h. die Matrixgleichungen $(E_{2\times 2} \cdot A) \cdot Y = E_{2\times 2} \cdot B$ und $A \cdot Y = B$ stimmen überein, also besitzen beide Matrixgleichungen dieselbe allgemeine Lösung.

zu (iv):
es gilt

$$X \cdot A^T = B^T \Leftrightarrow A \cdot X^T = B.$$

Also erhält man $X = Y^T$ als Lösung von $X \cdot A^T = B^T$, wobei Y die Lösung von $A \cdot Y = B$ bezeichne.

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 25% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 3\%$ und ein Zielwert K_x, der 25% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ und Zinsstaffel $10\%, 21\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_3 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.25^{\frac{1}{3}} \approx 1.08$, $\ln 1.03 \approx 0.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $11^3 = 1331$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_3 = 1.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.25)^{\frac{1}{3}} \approx 1.08 \Leftrightarrow i = 0.08 = 8\%$

(b) $K_x = 1.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.03)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.25)}{\ln(1.03)} \approx \frac{0.22}{0.03} = \frac{22}{3}$; $n = \lceil x \rceil = 8$

(c) $K_3 = (1.1 \cdot 1.21 \cdot 1) \cdot 1000 = 11 \cdot 121 = 11^3 = 1331$

$i_{\text{eff}} = (1.1 \cdot 1.21 \cdot 1)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(1.1^3\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim_{x\to 4} \left(x^2 - 5 \cdot x + 12\right)^{4/3}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to 4} \left(x^2 - 5 \cdot x + 12\right)^{4/3} = (16 - 20 + 12)^{4/3} = 8^{4/3} = 16.$$

[1] (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}$

Ergebniskontrolle: siehe Skript, Thema 4, Bsp 6, (c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{-1/2} = 0.$$

[2] (c) $\lim_{x\to 2} e^{2\cdot|\ln x|}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to 2} e^{2\cdot|\ln x|} = e^{2\cdot|\ln(2)|}.$$

ln streng monoton wachsend, also $\ln(2) > \ln 1 = 0$. Daher $|\ln(2)| = \ln(2)$, und somit

$$\lim_{x\to 2} e^{2\cdot|\ln x|} = e^{2\ln(2)} = e^{\ln(2^2)} = 2^2 = 4.$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = (x+3)^{5/2} - 20 \cdot x$ mit $D(f) = [-2, 6]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = \frac{5}{2} \cdot (x+3)^{3/2} - 20$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot (x+3)^{3/2} - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2} \cdot (x+3)^{3/2} = 20 \\ &\Leftrightarrow (x+3)^{3/2} = 8 \\ &\Leftrightarrow x + 3 = 8^{2/3} = 4 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$1 \in D(f)$ und keine Randstelle von $D(f)$. Also $x = 1$ einzige stationäre Stelle.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$f''(x) = \frac{15}{4} \cdot (x+3)^{1/2}$
$f''(1) = \frac{15}{4} \cdot (3+1)^{1/2} = \frac{15}{2} > 0$, also $x = 1$ lokale Minimalstelle mit Funktionswert $f(1) = (3+1)^{5/2} - 20 = 32 - 20 = 12$.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-2) = 1^{5/2} + 40 = 41$ und $f(6) = (6+3)^{5/2} - 120 = 3^5 - 120 = 123$. Es gilt

$$f(1) = 12 < 41 = f(-2) < 123 = f(6).$$

Somit erhalten wir

$12 = f(1)$ als minimalen Wert von $f(-2), f(1), f(6)$,
$123 = f(6)$ als maximalen Wert von $f(-2), f(1), f(6)$.

D.h. $(1, 12)$ ist globaler Minimalpunkt, und $(6, 123)$ ist globaler Maximalpunkt.

Thema: Partielle Ableitungen

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = \ln\left(x \cdot y + x + y^2\right) \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}.

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x, y) = \frac{y+1}{x \cdot y + x + y^2}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{-(y+1) \cdot (y+1)}{(x \cdot y + x + y^2)^2} = -\frac{(y+1)^2}{(x \cdot y + x + y^2)^2}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{x \cdot y + x + y^2 - (y+1)(2 \cdot y + x)}{(x \cdot y + x + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x + 2 \cdot y}{x \cdot y + x + y^2}$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{2 \cdot (x \cdot y + x + y^2) - (x + 2 \cdot y) \cdot (x + 2 \cdot y)}{(x \cdot y + x + y^2)^2} = \frac{2 \cdot (x \cdot y + x + y^2) - (x + 2 \cdot y)^2}{(x \cdot y + x + y^2)^2}$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Die Gesamtnachfrage eines Gutes im EU-Wirtschaftraum sei modelliert durch die Funktion $f(x,y) = 100 \cdot x^{3/4} \cdot y^{-2/3}$ mit mittlerem Einkommen $x > 0$ und Preis $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 40$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Preiselastizität $\mathcal{E}_y^f$ und an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort das mittlere Einkommen um 2% erhöht und der Preis um 3% vermindert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x,y) = 75 \cdot x^{-1/4} \cdot y^{-2/3} \text{ und } f'_y(x,y) = -\frac{200}{3} \cdot x^{3/4} \cdot y^{-5/3}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 40)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{75 \cdot 10^{-1/4} \cdot 40^{-2/3}}{100 \cdot 10^{3/4} \cdot 40^{-2/3}} = \frac{3 \cdot 10^{3/4}}{4 \cdot 10^{3/4}} = \frac{3}{4}.$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 40 \cdot \frac{-200 \cdot 10^{3/4} \cdot 40^{-5/3}}{3 \cdot 100 \cdot 10^{3/4} \cdot 40^{-2/3}} = -\frac{2 \cdot 40^{-2/3}}{3 \cdot 40^{-2/3}} = -\frac{2}{3}$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{3}{4} \cdot 2\% - \frac{2}{3} \cdot (-3)\% = 3.5\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(10, 40)$ zu $f(10.2, 38.8)$ beträgt ca. 3.5%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $f(x,y) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 - 6 \cdot y + 3$ eines Unternehmens in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode diese Funktion auf (lokale) Extremwerte unter der Erlösbedingung $3 \cdot x + 6 \cdot y = 36$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & + (f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 3 \cdot x + 6 \cdot y - 36 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 - 6 \cdot y + 3 + \lambda \cdot \big(3 \cdot x + 6 \cdot y - 36\big)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 6 \cdot x$ und $f'_y(x,y) = 6 \cdot y - 6$
  - $b'_x(x,y) = 3$ und $b'_y(x,y) = 6$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 6 \cdot x + 3 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 6 \cdot y - 6 + 6 \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = 3 \cdot x + 6 \cdot y - 36$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 6 \cdot x + 3 \cdot \lambda & = & 0 \\ 6 \cdot y - 6 + 6 \cdot \lambda & = & 0 \\ 3 \cdot x + 6 \cdot y - 36 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & -2 \cdot x \\ 6 \cdot y - 6 + 6 \cdot \lambda & = & 0 \\ 3 \cdot x + 6 \cdot y - 36 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & -2 \cdot x \\ y & = & 1 + 2 \cdot x \\ 3 \cdot x + 6 \cdot y - 36 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda & = & -2 \cdot x \\ y & = & 1 + 2 \cdot x \\ 15 \cdot x & = & 30 \end{array} \right\}$$

Also ist $(2,5,-4)$ die einzige Lösung des Gleichungssystems. Außerdem $(2,5) \in D(f)$, so dass $P1 = (2,5)$ der einzige bedingt stationäre Punkt ist.

- Zur Berechnung des Wertes von $D(2,5,-4)$
  - $f''_{xx}(x,y) = 6, f''_{yy}(x,y) = 6, f''_{xy}(x,y) = 0$
  - $b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = 0.$
- Berechnung des Wertes von $D(2,5,-4)$

$$\begin{aligned} D(2,5,-4) &= (f''_{xx}(2,5)+0)\cdot 6^2 - 2\cdot(f''_{xy}(2,5)+0)\cdot 3\cdot 6 + (f''_{yy}(2,5)+0)\cdot 3^2 \\ &= 6\cdot 36 - 2\cdot 0 + 6\cdot 9 = 216 + 54 = 270. \end{aligned}$$

  $D(2,5,-4) > 0$, also ist $(2,5)$ eine lokale Minimalstelle der Gesamtkostenfunktion f unter der Nebenbedingung $3\cdot x + 6\cdot y = 36$ mit Funktionswert

$$f(2,5) = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 5^2 - 6\cdot 5 + 3 = 12 + 75 - 30 + 3 = 60.$$