

Mathematik für Ökonomen – WS 2023/24 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

06.02.2024, 10:30-12:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone, Uhren oder Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,

dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.

Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum _____

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift _____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht:

Unterbrechungen

Abgabe

Korrekturabschnitt!

[Seite 1 von 11]

Aufgabe 1

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

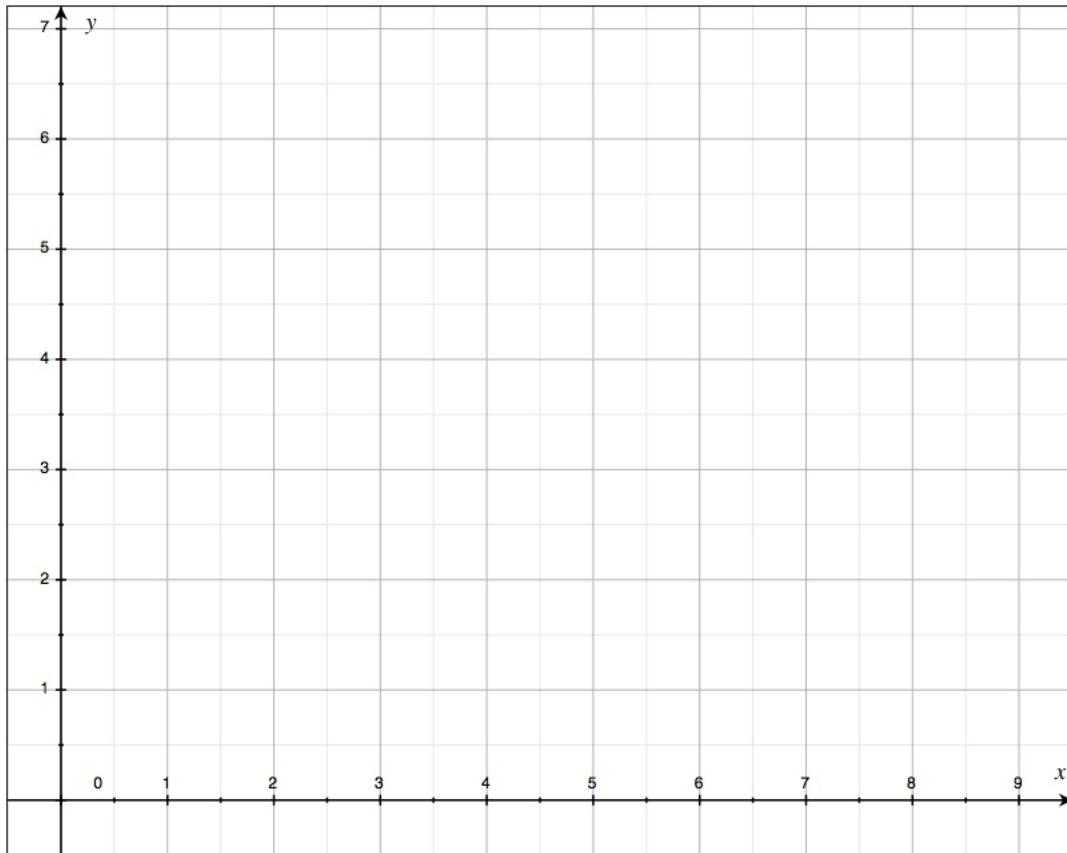
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

$$(1) \quad 2 \cdot y - 2 \cdot x \leq 2$$

$$(2) \quad 2 \cdot y + x \geq 5$$

$$(3) \quad 2 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x \geq \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad y + x \leq 9$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Aufgabe 2

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Rechnen mit Matrizen

- [4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

- (a) $(A \cdot B) + C$
(b) D^{-1} für $D = C \cdot B$

Aufgabe 3

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

- [2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 36 \\ 1 & 9 & -3 & 7 & 45 \end{array} \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan ...}} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 9 \end{array}$$

- [4] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}}_A \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

- (i) Welche Dimension besitzt Y ?
(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y .

Aufgabe 4

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinsseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?
- [2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x , der 50% über dem Anfangswert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n -ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ und Zinsstaffel 69%, 0%, 30%. Berechnen Sie den Zielwert K_3 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff} .

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{3}} \approx 1.14$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $13^3 = 2197$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Aufgabe 5

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{e^{2+x}}$

[2] (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{6 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}$

Aufgabe 6

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = e^{1-x^2} + x^2$ mit $D(f) = [-1, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
 f hat die Ableitung $f'(x) = 2 \cdot x \cdot (1 - e^{1-x^2})$.

- [4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extrempunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.
- [2](b) Untersuchen Sie auf globale **Minimalpunkte** (**Minimalstellen** und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Aufgabe 7

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} e^{t+2} & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{t^2} - 1 & \text{für } 1 < t \leq 3 \end{cases}.$$

Für $0 \leq x \leq 3$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_0^x f(t) dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [0, 1]$.

[4] (b) Berechnen Sie $F(2)$.

Aufgabe 8

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Partielle Ableitungen

- [4] Berechnen Sie für die Funktion $f(x, y) = (x^3 + y^2 + 1)^{3/2}$ ($x > 0, y > 0$) die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y , sowie f''_{xx}, f''_{yx} .

Aufgabe 9

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

- [5] Betrachten Sie die Nachfragefunktion $f(x, y) = 12 \cdot x^{-1/4} \cdot y^{1/3}$ eines Produktes mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.
- Bestimmen Sie die Preiselastizität \mathcal{E}_x^f und die Einkommenselastizität \mathcal{E}_y^f an der obigen Basisstelle.
 - Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 8% erhöht und das Einkommen um 3% steigt.

Aufgabe 10

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

- [7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x, y) = x^3 \cdot e^{y+2} \quad (x > 0, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + y = 1$. (Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrange-funktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x, y, \lambda) \\ := & (f''_{xx}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x, y)) \cdot (b'_y(x, y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x, y)) \cdot b'_x(x, y) \cdot b'_y(x, y) \\ & + (f''_{yy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x, y)) \cdot (b'_x(x, y))^2 \end{aligned}$$