Mathematik für Ökonomen – WS 2024/25 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. Rene Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

04.02.2025, 10:30-12:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone**, **Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrekturabschnitt

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $x - y \geq -1$

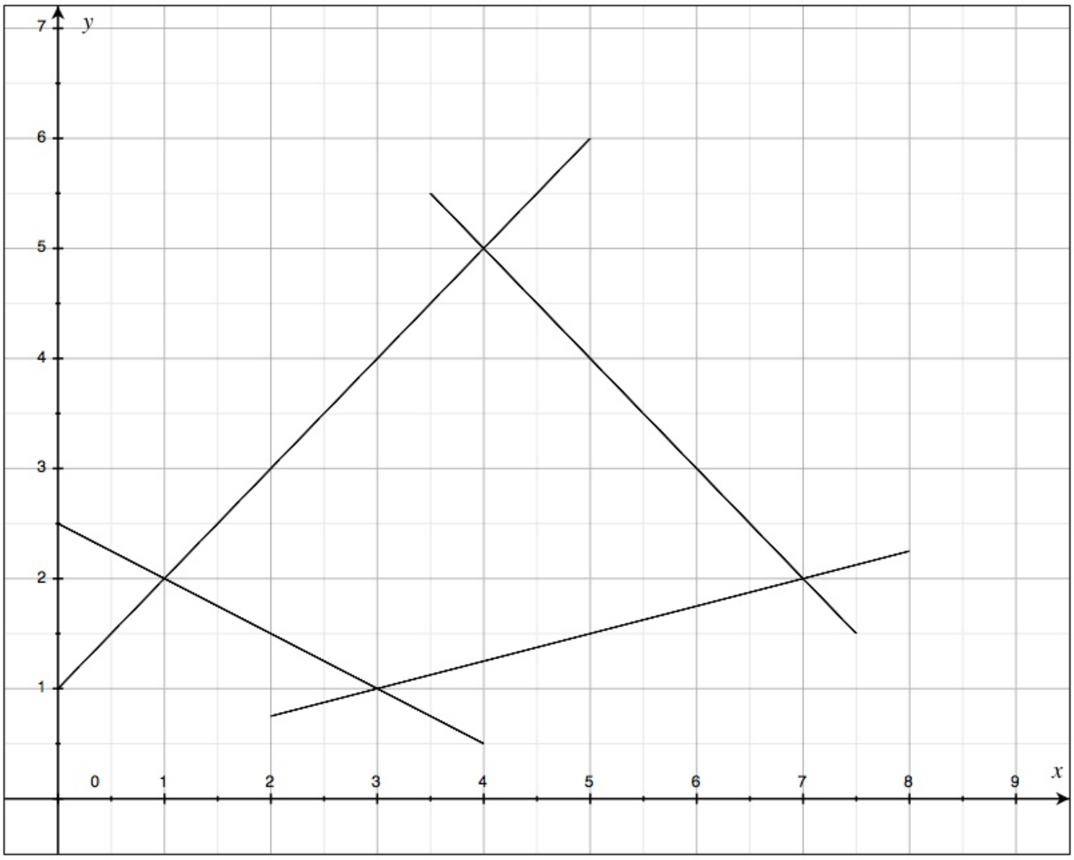
(2) $4 \cdot y - x \geq 1$

(3) $\frac{1}{3} \cdot y + \frac{1}{3} \cdot x \leq 3$

(4) $4 \cdot y + 2 \cdot x \geq 10$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 + x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \leq 9 - x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x\right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	6	4	8
	Z_2	4	2	2
	Z_3	2	4	2

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	2	3	1
	R_2	1	3	3

Verkaufspreise $p = (p_1, p_2, p_3) = (20, 30, 15)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Verkaufserlöse können hierbei erzielt werden?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 & 24 \\ 24 & 22 & 20 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 104 \\ 110 \end{pmatrix}$, Verkaufserlöse $= p \cdot E = (20, 30, 15) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 125$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan-Algorithmus

[3] (a) Bei der Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
3	3	3	3	12
2	3	2	1	5
4	5	4	3	13

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	b^*
1	0	1	2	7
0	1	0	-1	-3
0	0	0	0	0

(i) Bestimmen Sie aus dem Schlußtableau die Lösungsmenge L_b des linearen Gleichungssystems.

(ii) Berechnen Sie den Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des linearen Gleichungssystems, wenn $x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ gewählt wird.

[3] (b) Bestimmen Sie mithilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus die allgemeine Lösung der folgenden Matrixgleichung.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

(a) zu (i):

Beim LGS $Ax = b$ sind zwei Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 7 & - & x_3 - 2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & -3 & + & x_4 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

zu (ii):

spezielle Lösung, wenn $x_3 = 1$ und $x_4 = 2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) **Ansatz:** Tabellenform

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	Protokoll
- 1	-1	2	1	0	I
-3	1	2	0	1	II
1	- 1	1	0	0	III

Nach Anwendung des Gauß-Jordan Algorithmus

Lösungsmatrix:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $44\%, 20\%, 0\%, 20\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{4}} \approx 1.11$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $13^4 = 28561$, $144^2 = 20736$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_4 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^4 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{4}} \approx 1.11 \Leftrightarrow i = 0.11 = 11\%$

(b) $K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.41}{0.1} = \frac{41}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 5$

(c) $K_4 = (1.44 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.2) \cdot 10000 = 144 \cdot 12^2 = 144^2 = 20736$

$i_{\text{eff}} = (1.44 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.2)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.2^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\ln\left(x \cdot e^{3+x}\right)}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\ln\left(x \cdot e^{3+x}\right)} = \sqrt{\ln\left(e^4\right)} = \sqrt{4} = 2.$$

[2] (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 \cdot x^{7/2} + 4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2}{x^4 + 2 \cdot x^3 + 1}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{3 \cdot x^{7/2} + 4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2}{x^4 + 2 \cdot x^3 + 1} &= \lim_{x \to \infty} \frac{x^4(3 \cdot x^{-1/2} + 4 \cdot x^{-2} - 5 \cdot x^{-3} + 2 \cdot x^{-4})}{x^4 \cdot (1 + 2 \cdot x^{-1} + x^{-4})} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{3 \cdot x^{-1/2} + 4 \cdot x^{-2} - 5 \cdot x^{-3} + 2 \cdot x^{-4}}{1 + 2 \cdot x^{-1} + x^{-4}} = \frac{0}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = (x^2 - 4)^3$ mit $D(f) = [-1, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 6 \cdot x \cdot (x^2 - 4)^2$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extremalpunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x \cdot (x^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{oder} \quad x = 0 \quad \text{oder } x = 2$$

$-2 \notin D(f)$, 2 Randpunkt von $D(f)$, und $0 \in D(f)$ kein Randpunkt. Also ist $x_1 = 0$ die einzige stationäre Stelle.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$$f''(x) = \ldots = 6 \cdot (x^2 - 4)^2 + 24 \cdot x^2 \cdot (x^2 - 4)$$

$f''(0) = \ldots = 96 > 0$. Daher ist $x_1 = 0$ eine lokale Minimalstelle mit $f(0) = \ldots = -64$.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Extrempunkte (Extremstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-1) = \ldots = -27$, $f(2) = \ldots = 0$.
Vergleich mit lokalem Minimalpunkt aus (i) ergibt
$(0, -64)$ als globalen Minimalpunkt, und $(2, 0)$ ist globalen Maximalpunkt.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die Funktion $F : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_1^x \left(e^{-t} + 1/t^2\right)\, dt$.

[4] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [1, \infty[$.

[2] (b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \left(e^{-t} + 1/t^2\right)\, dt$.

Ergebniskontrolle:

(a) Es gilt für $x \in [1, \infty[$

$$F(x) = \int_1^x \left(e^{-t} + \frac{1}{t^2}\right)\, dt = \ldots = -e^{-x} + e^{-1} - \frac{1}{x} + 1.$$

(b) Es gilt

$$\int_1^\infty \left(e^{-t} + \frac{1}{t^2}\right)\, dt = \ldots = 1 + e^{-1}.$$

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = \ln(x^2 \cdot y + 1) \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xy}, f''_{yy}.

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x, y) = \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 \cdot y + 1}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \ldots = \frac{2 \cdot x}{(x^2 \cdot y + 1)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x^2}{x^2 \cdot y + 1}$$

$$f''_{yy}(x, y) = \ldots = \frac{-x^4}{(x^2 \cdot y + 1)^2}$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Outputfunktion $f(x,y) = e^{x+3\cdot y^2}$ eines Produktes mit Investitionsgut I $x > 0$ und Investitionsgut II $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 4$ und $y_0 = 2$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Elastizität $\mathcal{E}_x^f$ von Investitionsgut I und die Elastizität $\mathcal{E}_y^f$ von Investitionsgut II an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn dort 5% mehr vom Investitionsgut I und 1% weniger vom Investitionsgut II eingesetzt wird.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(4,2) = 4 \cdot \frac{f'_x(4,2)}{f(4,2)}$ und $\mathcal{E}_y^f(4,2) = 2 \cdot \frac{f'_y(4,2)}{f(4,2)}$ mit

$$f'_x(x,y) = e^{x+3\cdot y^2} \text{ und } f'_y(x,y) = 6 \cdot y \cdot e^{x+3\cdot y^2}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (4,2)$

$$\mathcal{E}_x^f(4,2) = \ldots = 4$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(4,2) = \ldots = 24.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(4,2) \cdot \frac{dx}{4} + \mathcal{E}_y^f(4,2) \cdot \frac{dy}{2} = \ldots = -4\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(4,2)$ zu $f(4.2, 1.98)$ beträgt ca. -4%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x,y) = x^2 \cdot e^y \qquad\qquad (x < 1, y > 0)$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 3$. (Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & + (f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 2 \cdot x + y - 3 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = x^2 \cdot e^y + \lambda \cdot \big(2 \cdot x + y - 3\big)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^y$ und $f'_y(x,y) = x^2 \cdot e^y$
  - $b'_x(x,y) = 2$ und $b'_y(x,y) = 1$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^y + 2 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = x^2 \cdot e^y + \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = 2 \cdot x + y - 3$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcccc} \lambda & = & -x \cdot e^y & & \\ x & = & 0 & \text{oder} & x = 1 \\ y & = & 3 - 2 \cdot x & & \end{array} \right\}$$

  Also sind $(0,3,0)$ und $(1,1,-e^1)$ die Lösungen des Gleichungssystems. Außerdem $(0,3) \in D(f)$, aber $(1,1)$ ist kein Element von $D(f)$. Daher ist $P1 = (0,3)$ der einzige bedingt stationäre Punkt.
- Zur Berechnung des Wertes von $D(0,3,0)$
  - $f''_{xx}(x,y) = 2 \cdot e^y$, $f''_{yy}(x,y) = x^2 \cdot e^y$, $f''_{xy}(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^y$
  - $b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = 0.$
- Berechnung des Wertes von $D(0,1,0)$

$$D(0,3,0) = \ldots = 2 \cdot e^3.$$

  $D(0,3,0) > 0$, also ist $(0,3)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 3$ mit Funktionswert $f(0,3) = 0 \cdot e^3 = 0$.