

Klausur Mathematik für Ökonomen

10.02.2026, 10:30-12:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone, Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **8 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe
kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum _____

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift _____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht:

Unterbrechungen

Abgabe

Korrekturabschnitt!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $y - x \geq -2$

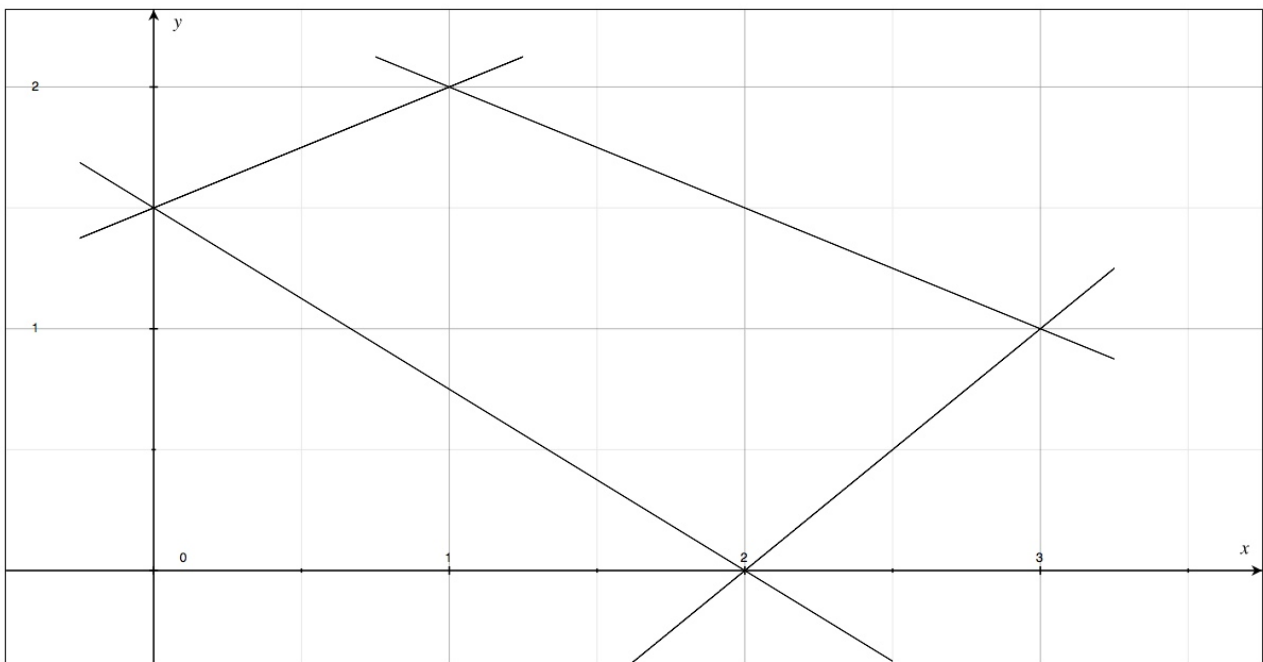
(2) $2 \cdot y + x \leq 5$

(3) $2 \cdot y - x \leq 3$

(4) $4 \cdot y + 3 \cdot x \geq 6$

Ergebniskontrolle:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x - 2 \text{ und } y \leq -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2} \text{ und } y \leq \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2} \text{ und } y \geq -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2} \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

- [5] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte					Zwischenprodukte		
		E_1	E_2	E_3			Z_1	Z_2	Z_3
Zwischenprodukte	Z_1	4	2	2	Rohstoffe	R_1	1	3	3
	Z_2	6	4	8		R_2	2	3	1
	Z_3	2	4	2					

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

- (a) Berechnen Sie M_{RE} , die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.
 (b) Wieviele Einheiten von Rohstoff R_1 werden für die Herstellung von 1 Einheit des Endproduktes E_3 benötigt?

- (c) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 26 & 32 \\ 28 & 20 & 30 \end{pmatrix}$

- (b) Der Bedarf an Rohstoff R_1 für eine Einheit von Endprodukt E_3 entspricht dem Matrixelement von M_{RE} in der ersten Zeile und dritten Spalte, also werden 32 Einheiten von Rohstoff R_1 für 1 Einheit von E_3 benötigt.

(c) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 140 \\ 126 \end{pmatrix}$, Verkaufserlöse $= r \cdot R = (3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 126 \end{pmatrix} = 420 + 252 = 672$.

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan-Algorithmus

- [3] (a) Bei der Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{array} \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \dots \xrightarrow{\dots} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- (i) Bestimmen Sie aus dem Schlußtableau die Lösungsmenge L_b des linearen Gleichungssystems.
 (ii) Berechnen Sie den Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3)^T$ des linearen Gleichungssystems, wenn $x_3 = 3$ gewählt wird.
- [5] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_A \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_B$$

- (i) Welche Dimension besitzt Y ?
 (ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y .

Ergebniskontrolle:

(a) zu (i):

Beim LGS $A \cdot x = b$ ist eine Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{lcl} x_1 & = & -4 + x_3 \\ x_2 & = & 5 - 2 \cdot x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

zu (ii):

spezielle Lösung, wenn $x_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) zu (i):

$A_{2 \times 3} \cdot Y_{m \times n} = B_{2 \times 3}$, also $m = 3$ und $n = 3$.

zu (ii):

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	b_3	Protokoll
1	2	-1	1	0	2	I
1	5	-4	0	1	-1	II
1	2	-1	1	0	2	I
0	3	-3	-1	1	-3	II - I
1	2	-1	1	0	2	I
0	1	-1	-1/3	1/3	-1	(1/3)·II
1	0	1	5/3	-2/3	4	I - 2· II
0	1	-1	-1/3	1/3	-1	II

Lösung Y von $A \cdot Y = B$ spaltenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 5/3 - x_3 \\ -1/3 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2/3 - x_3 \\ 1/3 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - x_3 \\ -1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die x_3 in $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ und $\mathbb{L}_3$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} (5/3 - a) & (-2/3 - b) & (4 - c) \\ (-1/3 + a) & (1/3 + b) & (-1 + c) \\ a & b & c \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?
- [2] (b) Gegeben: $i = 20\%$ und ein Zielwert K_x , der 50% über dem Anfangswert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n -ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel 21%, 10%, 0%, 10%. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff} .

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{4}} \approx 1.11$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $121^2 = 14641$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

- (a) $K_4 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i)^4 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{4}} \approx 1.11 \Leftrightarrow i = 0.11 = 11\%$
- (b) $K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.2)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.2)} \approx \frac{0.41}{0.18} = \frac{41}{18}$; $n = \lceil x \rceil = 3$
- (c) $K_4 = (1.21 \cdot 1.1 \cdot 1 \cdot 1.1) \cdot 10000 = 121 \cdot 11 \cdot 11 = 121^2 = 14641$
 $i_{\text{eff}} = (1.21 \cdot 1.1 \cdot 1 \cdot 1.1)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1.1^4)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = 12 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3$ mit $D(f) = [-1, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
 f hat die Ableitung $f'(x) = 15 \cdot x^2 \cdot (4 \cdot x^2 - 1)$.

- [2](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle stationären Stellen von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 15 \cdot x^2 \cdot (4 \cdot x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ oder } x^2 = 1/4 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = -1/2 \text{ oder } x = 1/2 \end{aligned}$$

$-1/2, 0, 1/2 \in D(f)$, also sind $-1/2, 0, 1/2$ die stationären Stellen von f .

- [2](b) Wieviele der stationären Stellen sind sicher als lokale Extremstellen identifizierbar?

Ergebniskontrolle

$$f''(x) = 30 \cdot x \cdot (4 \cdot x^2 - 1) + 15 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot x = 30 \cdot x \cdot (4 \cdot x^2 - 1) + 120 \cdot x^3$$

$$\text{alternativ: } f'(x) = 60 \cdot x^4 - 15 \cdot x^2, \text{ also } f''(x) = 240 \cdot x^3 - 30 \cdot x.$$

$$f''(-1/2) = 0 - \frac{120}{8} = -15, f''(0) = 0, f''(1/2) = 0 + \frac{120}{8} = 15.$$

$f''(0) = 0$, also nicht entscheidbar. $f''(-1/2), f''(1/2) \neq 0$, also sind $x = -1/2$ und $x = 1/2$ lokale Extremstellen. Daher können nur 2 stationäre Stellen sicher als lokale Extremstellen identifiziert werden.

- [2](c) Bestimmen Sie, wo es möglich ist, die lokalen Extrempunkte (Extremstellen und zugehörige Funktionswerte) der Funktion f über dem Definitionsbereich $D(f)$.

Ergebniskontrolle:

$$f''(-1/2) < 0, \text{ also } x = -1/2 \text{ lokale Maximalstelle mit } f(-1/2) = -\frac{12}{32} + \frac{5}{8} = -\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$$

$$f''(1/2) > 0, \text{ also } x = 1/2 \text{ lokale Minimalstelle mit } f(1/2) = \frac{12}{32} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{4}$$

- [2](d) Untersuchen Sie, ob die globalen Extremstellen von f über dem Definitionsbereich in einer der stationären Stellen angenommen wird. Bestimmen Sie außerdem alle globalen **Minimalpunkte** von f (**Minimalstellen** und zugehörige Funktionswerte) über dem Definitionsbereich $D(f)$.

Ergebniskontrolle:

Nach (a) sind $-1/2, 0, 1/2$ die stationären Stellen. Es gilt

$$f(-1) = -7 < -1/4 = f(1/2) < 0 = f(0) < 1/4 = f(-1/2) < 7 = f(1).$$

Daher ist keine stationäre Stelle eine globale Extremstelle, und $(-1, -7)$ ist der globale Minimalpunkt.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 2 \cdot t - 1 & \text{für } -1 \leq t \leq 0 \\ e^{-2 \cdot t} & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Für $x \in [-1, \infty[$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_{-1}^x f(t) \, dt$.

[3] (a) Berechnen Sie $F(0)$.

[3] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x > 0$.

[2] (c) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{\infty} f(t) \, dt$.

Ergebniskontrolle:

(a) Es gilt

$$F(0) = \int_{-1}^0 (2 \cdot t - 1) \, dt = 2 \cdot \int_{-1}^0 t \, dt - \int_{-1}^0 1 \, dt = 2 \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 - [t]_{-1}^0 = -2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = -2.$$

(b) Es gilt für $x > 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^0 (2 \cdot t - 1) \, dt + \int_0^x e^{-2 \cdot t} \, dt = F(0) + \int_0^x e^{-2 \cdot t} \, dt = -2 + \left[-\frac{e^{-2 \cdot t}}{2} \right]_0^x \\ &= -2 - \frac{e^{-2 \cdot x}}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{e^{-2 \cdot x}}{2}. \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\int_{-1}^{\infty} f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-1}^x f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x).$$

Also nach Teil (b)

$$\int_{-1}^{\infty} f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2} - \frac{e^{-2 \cdot x}}{2} \right) = -\frac{3}{2} - 0 = -\frac{3}{2}.$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Nachfragefunktion $f(x, y) = 200 \cdot x^{-1} \cdot y^4$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.
- (b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 1% erhöht und das mittlere Einkommen um 2% vermindert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}$ mit

$$f'_x(x, y) = -200 \cdot x^{-2} \cdot y^4 \text{ und } f'_y(x, y) = 800 \cdot x^{-1} \cdot y^3.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50, 10)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{-200 \cdot 50^{-2} \cdot 10^4}{200 \cdot 50^{-1} \cdot 10^4} = -\frac{50^{-1}}{50^{-1}} = -1$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{800 \cdot 50^{-1} \cdot 10^3}{200 \cdot 50^{-1} \cdot 10^4} = \frac{4 \cdot 10^4}{10^4} = 4.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = (-1) \cdot 1\% + 4 \cdot (-2)\% = -9\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(50, 10)$ zu $f(50.5, 9.8)$ beträgt ca. -9% .

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x, y) = 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x \cdot y \quad (x > -1, y > -3)$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $6 \cdot x = -4 \cdot y$.

(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion.

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} D(x, y, \lambda) \\ := & (f''_{xx}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x, y)) \cdot (b'_y(x, y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x, y)) \cdot b'_x(x, y) \cdot b'_y(x, y) \\ & + (f''_{yy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x, y)) \cdot (b'_x(x, y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
 $b(x, y) = 6 \cdot x + 4 \cdot y \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
 $L(x, y, \lambda) = 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x \cdot y + \lambda \cdot (6 \cdot x + 4 \cdot y)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
 - $f'_x(x, y) = 6 \cdot x^2 + 4 \cdot y$ und $f'_y(x, y) = 4 \cdot x$
 - $b'_x(x, y) = 6$ und $b'_y(x, y) = 4$
 - $L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda \cdot b'_x(x, y) = 6 \cdot x^2 + 4 \cdot y + 6 \cdot \lambda$
 - $L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda \cdot b'_y(x, y) = 4 \cdot x + 4 \cdot \lambda$
 - $L'_\lambda(x, y, \lambda) = b(x, y) = 6 \cdot x + 4 \cdot y$
- Bestimmung der bedingt stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{array} \right\} & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot x^2 + 4 \cdot y + 6 \cdot \lambda = 0 \\ 4 \cdot x + 4 \cdot \lambda = 0 \\ 6 \cdot x + 4 \cdot y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot x^2 + 4 \cdot y + 6 \cdot \lambda = 0 \\ \lambda = -x \\ 6 \cdot x + 4 \cdot y = 0 \end{array} \right\} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot x^2 + 4 \cdot y - 6 \cdot x = 0 \\ \lambda = -x \\ 6 \cdot x + 4 \cdot y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot x^2 + 4 \cdot y - 6 \cdot x = 0 \\ \lambda = -x \\ y = -\frac{3}{2}x \end{array} \right\} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot x^2 - 12 \cdot x = 0 \\ \lambda = -x \\ y = -\frac{3}{2}x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 \cdot x \cdot (x - 2) = 0 \\ \lambda = -x \\ y = -\frac{3}{2}x \end{array} \right\} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2 \\ \lambda = -x \\ y = -\frac{3}{2}x \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Lösungen des Gleichungssystems: $(0, 0, 0)$, $(2, -3, -2)$. Es gilt $(0, 0) \in D(f)$ und $(2, -3) \notin D(f)$. Also $(0, 0)$ einziger bedingt stationärer Punkt mit $\lambda = 0$.

- Zur Berechnung des Wertes $D_0(0,0,0)$:

- $f''_{xx}(x,y) = 12 \cdot x$
- $f''_{yy}(x,y) = 0$
- $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 4$
- $b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = 0$.
- $D_0(0,0,0) = f''_{xx}(0,0) \cdot 4^2 - 2 \cdot f''_{xy}(0,0) \cdot 6 \cdot 4 + f''_{yy}(0,0) \cdot 6^2 = -2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 < 0$

Also ist $(0,0)$ eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $6 \cdot x = -4 \cdot y$ mit Funktionswert $f(0,0) = 0$.