Musterlösung zur Probeklausur - Analysis I

Aufgabe 1: $S :=$ Menge aller Lehramtsstudenten im 1. Semester

$L :=$ Menge aller zukünftigen verbeamteten Lehrer

(a) $\forall s \in S : s \in L$

(b) i. Es gibt mindestens einen Lehramtsstudenten, der nicht zukünftig Verbeamteter Lehrer wird

ii. $\exists\, s \in S : s \notin L$

Aufgabe 2: (a) Induktion: $n = 1 : 1{\cdot}1! = 2! - 1$ ✓

Wir nehmen an: $1{\cdot}1! + \cdots + n{\cdot}n! = (n+1)! - 1$ für ein $n \geq 1$.

Dann gilt:

$$1{\cdot}1! + \cdots + n{\cdot}n! + (n+1)(n+1)! =$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! =$$

$$= (n+1)!(n+1+1) - 1 = (n+2)! - 1.$$

Alternative Lösung: Da $(k+1)! - k! = k!(k+1-1) = k{\cdot}k!$ ist, bekommen wir:

$$\sum_{k=1}^{n} k{\cdot}k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! = (n+1)! - 1$$

(b) Induktion: $n = 1 : 2^1 > 3{\cdot}1 - 4$ ✓

Wir nehmen an: $2^n > 3n - 4$. Dann:

$$2^{n+1} = 2{\cdot}2^n > 2(3n-4).$$

Wir wollen also zeigen, dass $2(3n-4) \geq 3(n+1) - 4$ ist.

Diese Ungleichung ist äquivalent zu:

$$6n - 8 \geq 3n + 3 - 4$$

$$3n \geq 7$$

$$n \geq 2\frac{1}{3}$$

Die letzte Ungleichung stimmt erst ab $n = 3$. Wir müssen also die Induktion mit $n = 3$ anfangen. Also sollten wir die Ungleichung noch für $n = 2$ und $n = 3$ überprüfen:

$2^2 > 3{\cdot}2 - 4$ ✓ $\quad 2^3 > 3{\cdot}3 - 4$ ✓

Aufgabe 3: (a) Da $a + b \leq a^2 + b^2$ ist, ist $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \leq 1$.

Für $a = b = 1$ erhalten wir $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} = 1$, d.h. $\sup A = 1$.

(b) Da $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} > 0$, ist 0 eine untere Schranke.

Um zu zeigen, dass $0 = \inf A$ ist, müssen wir eine Folge $x_n \in A$ finden, die gegen 0 konvergiert. Das kann man z.B. erreichen, wenn $a = b = n$, d.h. $x_n = \dfrac{n+n}{n^2+n^2} = \dfrac{1}{n}$ ist.

(Es gibt auch andere Möglichkeiten: $x_n = \dfrac{1+n}{1+n^2}$, etc.)

<u>Alternative Lösung für $\inf A = 0$:</u>

Sei $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen: $\exists\, a, b \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \leq \epsilon$.

Wähle <u>z.B.</u> $a = b = \left[\dfrac{1}{\epsilon}\right] + 1$. Dann ist $a, b \geq \dfrac{1}{\epsilon}$ und

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a} \leq \epsilon$$

Aufgabe 4: $$2^n \cdot 2^n \frac{1}{4^n + 2^n} \leq 2^n \left(\frac{1}{4^n+1} + \cdots + \frac{1}{4^n + 2^n} \right) \leq 2^n \cdot 2^n \frac{1}{4^n+1} = \frac{4^n}{4^n+1}$$

Es gilt: $$\frac{4^n}{4^n+2^n} = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^n} \to \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\frac{4^n}{4^n+1} = \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^n} \to \frac{1}{1+0} = 1$$

Also ist unsere Folge, nach Einschliessungskriterium, konvergent und der Grenzwert ist =1.

Aufgabe 5: (a) Da $\left|\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}\right| = \dfrac{n}{n^2+1} \geq \dfrac{n}{n^2+n^2} = \dfrac{1}{2n}$ für $n \geq 1$ gilt,

und da $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergiert, divergiert auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

D.h. unsere Reihe konvergiert <u>nicht absolut</u>.

<u>Alternative Lösung für die absolute Konvergenz:</u> Wähle $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, $b_n =$

$\frac{1}{n}$.

Da $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0$ und da

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (s. Globalübung 4, Aufgabe 2)

Wir benutzen das Leibniz-Kriteriumum zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ konvergiert.

i. $\frac{n}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{0}{1+0} = 0$

ii. $\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad n^3+n^2+n+1 \leq n^3+2n^2+2n \quad \Leftrightarrow$ $n^2+n \geq 1$ - stimmt für alle $n \geq 1$.

(b) Wir benutzen das Quotientenkriterium

$a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0 < 1$, d.h.

die Reihe konvergiert absolut.

Aufgabe 6: (a) Da die Folge $\frac{x_n}{n}$ gegen g konvergiert, gilt nach der Definition:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; |\frac{x_n}{n} - g| < \epsilon$$

Wähle $\epsilon = \frac{g}{2} (> 0)$. Dann ist :

$$\begin{aligned} \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; -\frac{g}{2} &< \frac{x_n}{n} - g < \frac{g}{2} \\ \frac{g}{2} &< \frac{x_n}{n} < \frac{3g}{2} \\ \frac{gn}{2} &< x_n < \frac{3gn}{2} \end{aligned}$$

Also ist für alle $n \geq n_0$:

$$\sqrt[n]{\frac{g}{2}} \cdot \sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\frac{3g}{2}} \cdot \sqrt[n]{n}$$

Da $\sqrt[n]{a} \to 1$ und $\sqrt[n]{n} \to 1$, gilt:

$\sqrt[n]{\frac{g}{2}} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1$ und $\sqrt[n]{\frac{3g}{2}} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1$. Also konvergiert $\sqrt[n]{x_n}$ gegen 1.

(b) Wenn $g = 0$ ist, stimmt die Aussage nicht: z.B. $x_n = 0$ oder $x_n = \dfrac{1}{2^n}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 = g$, aber $\sqrt[n]{x_n}$ konvergiert nicht gegen 1.

(Es gibt natürlich noch viele andere Beispiele, z.B. $x_n = \dfrac{1}{a^n}, \dfrac{1}{n^n}$, etc.)