Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

22.12.2009
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Weihnachtsübung Analysis I, Übung 10

Aufgabe 1.
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\cdot(-1)^{[1/|x|]} & \text{für } x\neq 0\\ 0 & \text{für } x=0\,.\end{cases}$$

Entscheiden Sie, ob die Funktion f im Punkt $x_0=0$ stetig ist.

Aufgabe 2.
Sei $f(x)=\dfrac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}-1}$ für $x\neq 0$. Kann die Funktion f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden?

Aufgabe 3.
Beweisen Sie, dass es eine reelle Zahl x gibt, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$x^5+\frac{4}{1+|x|+x^2}=0\,.$$

Aufgabe 4.
(a) Um 6 Uhr Früh hat es an einem bestimmten Ort $-5°$C. Um 12 Uhr hat es dort $4°$C.
– Gibt es einen Zeitpunkt irgendwann an diesem Tag, zu dem es dort exakt $3°$C hat? Begründen Sie!
– Wenn ja, was weiß man dann über diesen Zeitpunkt?
– Kann es einen Zeitpunkt zwischen 6 und 12 Uhr geben, zu dem es dort $6°$C hat? Begründen Sie!

(b) Niklas hatte irgendwann 30,34 Euro auf seinem Sparbuch. Zwei Jahre später hatte er 71,23 Euro. Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem er exakt 60,00 Euro auf seinem Sparbuch hatte? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Mit welchem Satz aus der Vorlesung stehen die Aufgaben (a) und (b) in Zusammenhang? Inwiefern erfüllen sie die Voraussetzungen des Satzes (nicht)? Welche Ihrer Antworten von oben können Sie mit Hilfe des Satzes bestätigen bzw. widerlegen?

Aufgabe 5.
Entscheiden Sie, ob die Funktion $f(x)=x^2$ auf
(a) dem Intervall $(1,10)$,
(b) $\mathbb{R}$
gleichmäßig stetig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden!

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 5.1.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6.

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ auf dem Intervall $[0,\infty)$ gleichmäßig stetig ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Beweisen Sie, dass es eine reelle Zahl x gibt, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\log_2(3x+2)=2x.$$

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Sei $f\colon[0,1]\to[0,1]$ stetig. Beweisen Sie, dass es eine Zahl $a\in[0,1]$ mit $f(a)=a$ gibt.

Aufgabe 4. (3 Punkte)
Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $f(x_0)>0$. Beweisen Sie, dass es eine Zahl $\delta>0$ gibt, sodass

$$f(x)>0 \quad \text{für alle } x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

Über Weihnachten:

Bitte wiederholen Sie alle Begriffe und Definitionen des Skriptes bis einschließlich Kapitel Stetigkeit. Überlegen Sie sich, diese Begriffe auf Kärtchen zu übertragen und sinnvoll mit ihnen umzugehen.

Die Klausuraufgaben der Probeklausur (im Netz) sind gleichzeitig weitere Hausaufgaben über Weihnachten (insgesamt 12 Punkte).

Bitte bearbeiten Sie die Probleme der Übung **und** Globalübung noch einmal vollständig. Musterlösungen zu allen Globalübungen gibt es im neuen Jahr im Netz. Der Inhalt der Globalübung ist prüfungsrelevant.

Bitte benutzen Sie ab jetzt für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Ab dieser Übung gibt es pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.

Üben Sie auch das griechische Alphabet: schreiben Sie je drei Zeilen handschriftlich (wird mit korrigiert, 1 Punkt)

$$\Sigma,\ \sigma,\ \eta,\ \xi,\ \zeta,\ \tau,\ \mu,\ \nu,\ \lambda,\ \delta,\ \theta,\ \phi,\ \psi,\ \Omega,\ \omega.$$

Hausaufgabe (3 Punkte): Aufgabe Skript S. 94, Bsp.3: Erarbeiten Sie sich den Beweis und füllen alle Lücken.

Ihr Analysis 1 Team wünscht Ihnen eine frohe und besinnliche Weihnacht und einen guten Start in das neue Jahr!

Patrizio Neff, Waldemar Pompe, Christoph Ableitinger