Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

5–7.01.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Übung 11

Aufgabe 1.
Sei $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Beweisen Sie direkt aus der Definition, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(a)$.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie alle Punkte $a\in\mathbb{R}$, in denen die Funktion f differenzierbar ist.

(a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{für } x>0\,, \\ x^2 & \text{für } x\le 0\,. \end{cases}$ (b) $f(x)=\sqrt{|x|}\,,$ (c) $f(x)=x\cdot|x|$.

Aufgabe 3.
Sei $\{x_n\}$ eine Folge, die gegen $g\in\mathbb{R}$ konvergiert. Beweisen Sie, dass die Folge

$$a_n:=\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n$$

konvergiert und der Grenzwert gleich e^g ist.

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass die Folge $a_n:=n(\sqrt[n]{e}-1)$ konvergiert und finden Sie den Grenzwert.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 12.1.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie ab jetzt für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Ab dieser Übung gibt es pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Bestimmen Sie alle Punkte $a\in\mathbb{R}$, in denen die Funktion

$$f(x)=(e^x-1)|x|$$

differenzierbar ist.

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x)|\le x^2 \quad \text{für alle } x\in\mathbb{R}.$$

Beweisen Sie, dass f in 0 differenzierbar ist und $f'(0)=0$.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^n$ (3 Punkte), (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n}{2^n}\right)^n$ (3 Punkte).

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Skizzieren Sie zu den folgenden typischen „Medienaussagen“ in a-d) jeweils die zeitliche Entwicklung des **Schuldenstandes**!

a) Die Neuverschuldung eines bestimmten Landes ist in den letzten drei Jahren kontinuierlich zurückgegangen.

b) Die Neuverschuldung ist in den letzten drei Jahren kontinuierlich gewachsen.

c) Der Schuldenabbau eines Landes hat in den letzten drei Jahren kontinuierlich zugenommen.

d) Der Schuldenabbau hat in den letzten drei Jahren kontinuierlich abgenommen.

e) Skizzieren Sie die Graphen der Ableitungsfunktionen zu den folgenden Funktionsgraphen, indem Sie überlegen, wie groß die Steigung der Tangente an die Funktion jeweils ist: