Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

12–14.01.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Übung 12

Aufgabe 1.
Sei $f(x)=x^x$ für $x>0$. Beweisen Sie, dass f auf dem Intervall $(0,\infty)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(x)$.

Aufgabe 2.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Falls ja, bestimmen Sie sie.

(a) $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{e^y}$, (b) $\lim\limits_{t\to 0+} t\log t$, (c) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^x-1}{x\log x}$.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y die folgende Ungleichung gilt

$$\left|\log\frac{1+e^x}{1+e^y}\right|\le|x-y|\,.$$

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f'(x)=2f(x)\quad\text{für alle } x\in\mathbb{R}.$$

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 19.1.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie ab jetzt für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Ab dieser Übung gibt es pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Sei $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)^x$ für $x>-1$.
Beweisen Sie, dass f auf dem Intervall $(-1,\infty)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(x)$.

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Entscheiden Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^x$$

existiert. Falls ja, finden Sie ihn.

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Seien $a>1$ und $c>0$. Die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfülle

$$|f(x)-f(y)|\le c|x-y|^a\quad\text{für alle } x,y\in\mathbb{R}\,.$$

Beweisen Sie, dass f eine konstante Funktion ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4. Momentane Änderungsrate (3 Punkte)

Zur Motivation: In der Vorlesung wurde die Ableitung einer Funktion geometrisch über die Tangentensteigung an einem Punkt der Funktion motiviert. Daneben wurde auch erwähnt, welche Rolle die Ableitung als beste, lokale Approximation von Funktionen hat. Es gibt aber noch eine weitere, ebenso wichtige Interpretation der Ableitung, die für Anwendungen sogar meist die zentrale Rolle spielt: die Interpretation der ersten Ableitung als momentane Änderungsrate einer Größe.

(a) Die Wegfunktion einer anfahrenden U-Bahn sei durch $s(t) = 0,4t^2$ für $t \in [0, 10]$ gegeben (t in Sekunden, $s(t)$ in Meter). Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit der U-Bahn im Zeitintervall $[4, 4+h]$ für variables $h \in (0, 6]$!

(b) Was soll man sinnvollerweise unter der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 4$ verstehen und wie lässt sich diese bestimmen?

(c) Das Konzept der momentanen (bzw. lokalen) Änderungsrate lässt sich auch auf andere Anwendungsgebiete ausweiten: Der Luftdruck in Abhängigkeit von der Seehöhe kann durch den Funktionsterm $p(h) = 101325 \cdot e^{-\frac{h}{7990}}$ beschrieben werden (h in Meter, $p(h)$ in Pascal). Berechnen Sie die lokale Druckänderung auf Meeresniveau und in einer Höhe von $h = 3000$ m! Welche Einheit haben die Ergebnisse?