Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

19–21.01.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Übung 13

Aufgabe 1.
Finden Sie den kleinsten und den größten Wert der Funktion f auf dem angegebenen Intervall und skizzieren Sie den Graph der Funktion f.

(a) $f(x)=x\log x$ auf $(0,1]$, (b) $f(x)=x^4-2x^8$ auf $[0,1]$.

Aufgabe 2.
Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle 0 der Funktion

$$f(x)=\sqrt[4]{1+x}.$$

Mithilfe der Taylorformel berechnen Sie eine Approximation an $\sqrt[4]{1.5}$ und schätzen Sie den Fehler ab.

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle 0 der Funktion $f(x)=e^x$. Mithilfe der Taylorformel berechnen Sie eine Approximation an $\sqrt[4]{e}$ und schätzen Sie den Fehler ab.

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 26.1.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6. Bitte benutzen Sie ab jetzt für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Ab dieser Übung gibt es pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.

Aufgabe 1. (3 Punkte)
Bestimmen Sie den kleinsten und den größten Wert der Funktion $f(x)=x^{1/x}$ auf dem Intervall $[1,4]$. Entscheiden Sie, welche Zahl größer ist: e^π oder π^e?

Aufgabe 2. (3 Punkte)
Sei f zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und $f(0)=f'(0)=0$. Beweisen Sie, dass es eine positive Zahl c gibt, so dass die Ungleichung

$$|f(x)|\leq cx^2$$

für alle $x\in[-1,1]$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Kreis- und Quadratfläche (3 Punkte)

(a) Die Ableitung des Kreisflächeninhalts nach dem Radius ergibt genau den Kreisumfang. Bestätigen Sie diese verblüffende Aussage zunächst rechnerisch!

(b) Begründen Sie nun den Sachverhalt in (a) anhand einer Skizze! Zeichnen Sie dazu einen Kreis mit Radius r und verlängern Sie r um ein kleines Stück $\Delta r > 0$! Wie groß ist die *absolute* Änderung des Flächeninhalts $A(r)$ im Intervall $[r, r + \Delta r]$, also die Differenz $A(r + \Delta r) - A(r)$? Woran erkennt man am Ergebnis, dass der Umfang des Kreises eine Rolle spielt? Verdeutlichen Sie diesen Zusammenhang anhand Ihrer Zeichnung!

(c) Wie groß ist die *mittlere* Änderungsrate von $A(r)$ im Intervall $[r, r+\Delta r]$? Was passiert, wenn man nun mit Δr gegen Null geht?

(d) Berechnen Sie die Ableitung des Quadratflächeninhalts $A(a) = a^2$! Gilt auch diesmal, dass das Ergebnis gleich dem Quadratumfang ist? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie wie in (b) vorgehen!