Prof. Dr. Patrizio Neff
Dr. Waldemar Pompe
Dr. Christoph Ableitinger

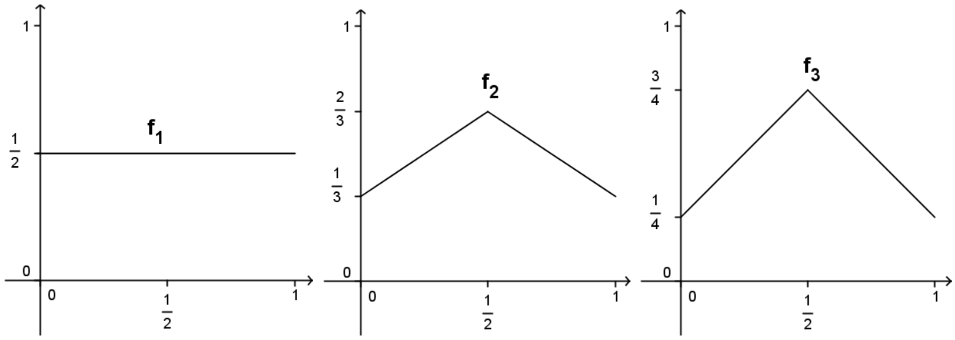
26–28.01.2010
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Analysis I, Übung 14

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie alle Punkte aus dem Definitionsbereich der Funktion f, in denen die Funktion f ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt. Bestimmen Sie auch Intervalle, auf denen die Funktion f konvex ist.

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, (b) $f(x) = \sqrt{x} - \log x$.

Aufgabe 2. Funktionenfolgen
(a) Geben Sie den Funktionsterm von $f_n(x)$ zu folgender Funktionenfolge an!



(b) Gegen welche Grenzfunktion konvergiert die Funktionenfolge punktweise?

(c) Geben Sie eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ an, die punktweise gegen folgende Grenzfunktion f konvergiert, wobei f_n stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ sein soll! Skizzieren Sie die ersten paar Funktionen f_1, f_2, f_3, usw.!

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \,. \end{cases}$$

(d) Finden Sie auch eine Funktionenfolge aus lauter auf ganz $\mathbb{R}$ **differenzierbaren** Funktionen f_n, die punktweise gegen die Funktion f aus Aufgabe (c) konvergiert!

Aufgabe 3.
Untersuchen Sie die folgenden Funktionsfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ auf $[0,1]$, (b) $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$ auf $(0, +\infty)$.

Bitte wenden!

Hausaufgaben
Abgabe bis zum 2.2.2010 (Dienstag), 10:00 Uhr in T03 R03 in den Übungskasten Nr. 6.
Bitte benutzen Sie für alle Hausaufgaben ausschliesslich weisses Blankopapier, einseitig dokumentenecht beschriftet in blau oder schwarz, durchgehend nummeriert und links oben getackert. Bitte verwenden Sie keine Hefter, Ordner oder Klarsichthüllen. Achten Sie weiterhin auf Ihre Handschrift und Leserlichkeit. Für viele von Ihnen könnte es eine gute Idee sein, mit Füller zu schreiben. Es gibt pro Hausübung einen Zusatzpunkt für Ordnung, Handschrift und Leserlichkeit.

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie alle Punkte aus $\mathbb{R}$, in denen die Funktion f ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt. Bestimmen Sie auch Intervalle, auf denen die Funktion f konvex ist.
(a) $f(x) = x^8 + x^2 + 10x - 15$ (3 Punkte), (b) $f(x) = e^{-x^2}$ (3 Punkte).

Aufgabe 2.
Untersuchen Sie die folgenden Funktionsfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.
(a) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ auf $[0,1]$ (3 Punkte), (b) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+x^2}$ auf $[0,2]$ (3 Punkte).

Aufgabe 3. (3 Punkte)
Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq \frac{1}{4}$ und a reelle Zahlen mit $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} + x_i^2 \geq \sqrt{an} + \frac{a^2}{n}.$$

Hinweis: Konvexität ausnutzen.